目　　錄

懷念曾炯之博士

劉方由（廣州暨南大學）　陳省身（美國伯克利加利福尼亞大學）
蘇步青（上海復旦大學）　程毓淮（美國馬薩諸塞大學）

編者按：本文集第二輯發表"我國近世代數的先驅——曾炯之博士"一文前後，該文作者、曾博士的後人曾令林先生與當年同曾博士交往的老一輩數學家聯繫，收到一些文章、回憶錄、信函和照片，十分珍貴。今遵令林先生之囑，依文章和信函的時間順序一併刊出，以饗讀者。

曾炯不是一位普通的博士

劉方由
（廣州暨南大學數學系）

曾炯，不是一位普通的博士。他的學術成就，國際著名。

我從年輕的時代起就了解曾炯。那年頭我在南昌讀"心遠中學"，他以家貧，讀不起中學，只得上那"四不收"的學校，即不收雜費、不收學費、不收齋膳費、不收伙食費的"師範學校"。官家子弟瞧不起"師範生"，常挖苦嘲笑爲"施飯生"！曾炯念的是江西省立第一師範學校，簡稱"一師"，即今日"南昌師範學校"的前身。他苦讀的精神，好學生無不敬佩！

後來，我們又在"國立武昌大學"同學，而且一同攻讀數學，一同受業於陳建功先生門下。他與另一位數學家王福春同班，我比他們低兩級。可我們幾個就如同兄弟一般，課餘之暇、總在一起、談愛國、談讀書、談數學。寒假暑假，也總是結伴歸家，又結伴返回學校。幾乎形影不分。他無論在校學習或放假在家，對數學勤奮鑽研，持之以恒。這是一般人所難趕得上的。

他 1926 年畢業於武昌大學數學系。旋即考上官費留學，1928 年赴德國學數學。他是"世界數學中心"——哥庭根大學哲學院數學部——的研究生。哥庭根大學在 20 年代末和 30 年代初期，是鼎盛時期。這時期，又號稱"諾特時代"。艾米・諾特(Emmy Noether)又稱"世界近代代數之母"。他把整個數學代數化。曾炯就是這位最偉大的女數學家的學生。他在諾特嚴格的指導下，勤奮苦學，終於成了大材。1933 年他發表了第一篇震動世界的論文：《函數域上的可除代數》，證明和提出了兩大定理，國際上命名爲"曾氏定理"。從此，蜚聲中外。1933 年完成 1934 年發表的博士論文《代數函數域上的代數》，又證明和提出了另兩個定理，國際上同樣命名爲"曾氏定理"。1936 年曾炯任教於國立浙江大學數學系期間，又發表了一篇重要的論文《關於擬代數封閉域層次論》，又提出了一個新的定理，并建立了擬代數封閉域層次論。此定理，國際數學界命名爲《曾-蘭定理》，其層次論，命名爲"曾層次"。他對世界數學作出了重大

的貢獻。他是世界著名的大數學家。



艾米・諾特

諾特是曾炯的博士指導教師。諾特是猶太人，1933 年受法西斯迫害逃離德國前夕，還諄諄囑咐他的學生"務必完成"博士論文。當 1935 年諾特在美國病逝時，曾炯得此消息潸然泪下。(照片和說明文字由曾令林提供)

姜立夫老前輩本來就是美國哈佛大學博士，1933 年利用休假的機會，到哥庭根大學學術訪問，與曾炯同窗。當 Emmy Noether 遭希特勒納粹黨清洗離開德國後，姜老先生便同曾炯、程毓淮博士等一道，從哥庭根奔往漢堡大學，轉到著名的數學家阿庭大師門下繼續訪問研究。在漢堡，曾炯又同另一位大數學家陳省身結識了。1935 年曾炯隨同姜老先生自漢堡經意大利羅馬返回祖國了。姜立夫教授回國後，遇植物學家胡先驌博士，姜又向胡博士介紹了曾炯對世界數學的偉大貢獻。因此，胡博士到了江西任國立中正大學第一任校長之初，即向我打聽曾炯的近址(當時我任教於中正大學數學系)，他想邀請曾炯到中正大學主持數學系。不料此時曾炯已病逝！胡博士知道，深爲惋惜！

陳省身博士當今世界第一流數學家，他在自己的《傳記》中，提及曾炯："……炯之，Emmy Noether 的學生，他的論文是有名的'曾氏定理'，是代數幾何中的基本性的貢獻。炯之爲人直爽誠懇，沒有人不喜歡他，不幸抗戰時期死於四川西昌。"

70 年代中期(1976)，美國數學代表團來到中國，團長、著名的代數學家 S. Mactane 向中國的數學家作學術報告:《代數的過去和將來》，他論及世界代數學家十一人，曾炯是其中之一，而且是唯一的一個中國人。國際數學界的這種評價，過去中國老數學家陳建功先生也介紹過。這類的斷語可否作爲定論，尚有待現在和將來驗證。但可想見曾炯的幾大"曾氏定理"對世界數學作用之大，影響之長遠！

最後，我想借用清代愛國詩人龔定庵的一首詩作爲本文的結束語：

不是逢人苦譽君，
亦狂亦俠亦溫文；
照人膽似秦時月，
送我情如嶺上雲！

1991 年 9 月

憶　炯　之

陳省身

我是在 1934 年 10 月在德國漢堡認識炯之的。那時他剛完成他的有名的關於"函數域可除代數(division algebra)"的基本定理，來漢堡作博士後研究。炯之爲人誠懇、豁達，没有人不喜歡他。那年在漢堡的中國數學家，還有姜立夫先生，程毓淮，周煒良等。我們時常共餐暢談對於發展中國數學的抱負和計劃，回顧半世紀中國數學的進展，感慨繫之。炯之和我都喜歡吃烤鵝，確是德菜中的美味。

漢堡一別，我們没有再見，通信亦稀。他回國後没有充分發展他的才力，是國家的損失。

(1991 年 10 月 10 日於伯克利)

信　函　摘　編

蘇步青教授致曾令林先生的信

曾令林先生：

三月六日大札已由全國政協辦公廳轉下，借悉一是。曾炯教授是抗戰之前在浙江大學數學系的老同事，逝世多年了，今瞻仰遺照，猶能想象當年風采，言之曷勝感慨。

曾老博士論文是在漢堡大學阿爾丁教授指導下作成的，可能在《漢堡學報》發表。可惜時間過了半個世紀，……

復，順頌

教祺

蘇步青手啓

1989 年 4 月 21 日

程毓淮教授致曾令林先生的信

令林教授：

收到您 12 月 3 日的手書，真是出我意外！我和您父親確是同學好友，他比我年長，時常在校里圖書館見到。有時和一些同學們出外游玩。數十年前的事歷歷在目，但在 1934 年後即没有再見到、也未通過信。……

敬祝年安

程毓淮

1990 年 12 月 17 日(於馬薩諸塞大學)

陳省身教授致曾令林先生的信

令林同志：

前信稽復爲歉。9 月 28 日來信收到，附拙文，匆匆撰成，不盡所懷。

找到了兩張當年共游的相片，當制版盡快寄上。

匆請教安

陳省身

1991 年 10 月 10 日（於伯克利）

令林同志：

附上底片兩張，系 1935 年在德國哥丁根① 所攝，片中有姜立夫、葉理殿先生。

祝諸事順利。

陳省身

1991 年 10 月 28 日（於伯克利）

编者後記：文中一處提到“阿庭”另一處有“阿爾丁”，實爲一人，均由 Arting 譯出。E. Arting (1898—1962)，德國數學家，1973 年移居美國。

① 據本文的前兩篇内容判斷，可能應是德國漢堡——編者。



1935 年於德國漢堡

左起：曾炯之，
姜立夫，
陳省身.

（照片由陳省身教授提供）



中國現代數學家
的一次盛會
1935 年，漢堡

古代中國印度間的數學聯係

洪　天　賜 Ang Tian Se
（馬來西亞馬來亞大學中文系）

古代中國和印度鄰接，早在公元前兩國人民已有跨國界活動。公元前 2 世紀中國外交使節張騫的報告說明了這種情況。以張騫爲首的使節團被皇帝派往中亞[1]，用十二年時間，成功地編織了與西域各國間的友誼紐帶。張騫觀察到中國南部的某些產品遍及北印度市場[2]。他還發現中亞、西亞甚至更遠地區的人民特別贊賞中國的優質絲綢；這表明絲綢市場早在西漢以前已經存在。後來聞名世界的絲綢之路起始西漢首都長安，延伸到當時的邊城敦煌，過吐蕃或樓蘭、和田與中亞的塔什干連接。絲綢商人們從和田或塔什干可以走南路經過塔什庫爾干(Tashkurgan)和 Caspapyra 到達印度的 Takesila；或者向西到 Mary 也有兩條路：一是走撒馬爾罕，另一是過巴爾干。森(S. N. Sen)認爲許多生意人寧願走喀布爾(Kabul)峽谷和開伯爾(Khybar)山口[3]到達印度。絲綢之路的西段從 Mary 通過達姆甘(Damgham)、哈馬丹(Hamadan)和泰西封(Ctesiphon)，自古就有了。東西之間最重要的聯係除商品的交流，也有思想的傳遞。森指出，東印度早期到中國也有兩條路：一是通過緬甸的 Burma 和阿薩姆的 Manipur，另一是通過西藏和錫金，走連接拉薩和甘托克(Gantok)，并延伸到恒河(Gangetic)峽谷的 Pataliputra。

絲綢之路不僅是橫穿亞洲的貿易通道，同時也是中國同印度、羅馬帝國、甚至更遠的西方國家進行文化交流的最重要的渠道。在此期間，中國被看成是閉關自守的世界。直到 2 世紀佛教傳入後這種狀態才被打破。

隨着佛教的傳入，著名的佛教學者從克什米爾和西、東印度由陸路或乘船來到中國，歷經數載傳播教旨、翻譯教規，使教徒數量逐年增長。成百上千的中國僧人冒險長途跋涉到印度學習梵文、翻譯佛經。第一位著名的僧人叫法顯(334－420)，於 399 年沿陸路到印度，414 年乘船返國。他除了譯佛經中釋加牟尼聖訓之外，還對訪問過的佛教王國作詳細的考察記錄。這些寶貴的材料對證實和確立中亞和南亞的地理位置和年代表起了不可估量的作用。

還有唐朝(618－906)的玄奘(596－664)，是一位最著名的朝聖者，同時也是一位翻譯家，曾在印度 16 年(629－645)。差不多同時，在 671 到 695 年間，僧人義淨渡海繞了一圈到達印度。中印間常設的、服務於旅客的中間停留站在蘇門答臘仍有保留[4]。鑒於這種設施和長期的宗教文化接觸，中印間科學觀點也開始互相交流和融合。本文僅限於同時期中印數學的發展，討論兩者可能存在的數學聯係[5]。

在中印兩種文明中，很難指明數學何時率先發展成一門科學。然而，兩國有可能都在早期發展了描述性天文學，使數學知識成爲度量時間和角度的工具；因此，通曉天文意味着準確應用算術、代數、幾何和三角知識。

隨着佛教傳人中國，印度天算著作接踵而至，譯成中文後學者們競相研究。有些著作已得到官方承認並編入史書。如 610 年魏徵編《隋書》書目中有一係列印度天算著作，所有的標題均以"婆羅門"開頭，意謂"婆羅門教的"。十分有趣的是，在日本發現的《婆羅門陰陽算曆》是 9 世紀由中國傳人日本的。

唐朝時不僅印度天算知識傳人，印度學者們還以官方或民間的組織形式積極參與。一批有影響的印度數學家、天文學家居住在唐朝首都長安，形成三個各具風格的宗族，叫做迦葉氏(Sheye)或迦葉波(Kasyapa)，瞿曇氏(Gautama)和俱摩羅(Jumoluo)或鳩摩羅(Kumara)。迦葉氏重要成員是迦葉孝威，他幫助李淳風在 665 年制定了《麟德曆》。在瞿曇氏一族中瞿曇羅和瞿曇悉達引人注目。瞿曇羅在 665 年被任命天文局① 的首長，并繼任此職三十餘年。他爲朝庭制定了兩種日曆：697 年的《經緯曆》和 698 年的《光宅曆》。後來瞿曇悉達成爲瞿曇羅的接班人，他受委托把 Navagraha 曆法體系在 718 年從梵語譯成中文，叫做《九執曆》②，它特别强調計算在中國的日食和月食。此外，瞿曇悉達還由於編輯《開元占經》(開元年間的占星術和天文學)而名垂久遠，該書中出現了零的符號和其他革新的內容。

另一著名的瞿曇氏家族成員是瞿曇巽③，762 年成爲天文局的代理首長。這個宗族爲維護他們超越數學、天文學的權威發揮了巨大的影響。一個多世紀他們世襲了天文局的官位，也表明了這一點。

縱覽歷史，無疑從佛教傳人中國後，中國人已接觸到大量的印度天文數學科學。同樣也可以說，數學知識傳播到印度，一方面是印度學者自己帶回去的，一方面是由中國商人帶去的。在此考察兩種文明中某些共有數學思想的歷史發展，并研究兩者間可能的聯係，將是十分有趣的。印度人以數字計算的淵博天賦而出衆，自古數學就是印度教育的重要組成部分。小孩從五歲就要受怎樣數數的特别訓練[6]。甚至在早期梵文中 ganita 字義爲"計算科學"，已被認爲是"科學的頂峰"，在公元初年前其地位和價值已被加强和進一步肯定，并擴大了它的研究範圍。於是，ganita 就變成了一般數學的含義。

爲什么印度人要用一些計算符號？爲弄清這個原因，最重要的是搞清楚他們是怎樣使用算具的。算板叫 pati，用粉筆或小石頭在沙地或算板上計算。字要寫得大些才清楚，爲省地方，設計出算式就有必要了，數字一用完就擦掉。計算是從左向右書寫的。

數學在古代中國的教育中也起了重要作用。自周朝建立，約在公元前 11 世紀，就把數學看作是"士"的教育和訓練中的"六藝"之一[7]。中國人和印度人一樣，在板子或地面上用一束籌來計算。……古代中國人已熟知數字的位值或十進制。這種數字從左向右排列，與中國人通常從上到下、從右向左的書寫方法適成對比。加法的過程與婆什迦羅(Bhaskara Ⅱ，1114—1178)在《利拉瓦提》(Lilavati，1150)[8]中提出的相反過程類似，加法是從左向右計算低位求出的和。減法同加法，只是欲求的是差，位於大數之上。這兩種算法裡術語"進位"(carry)和"借位"(borrow)有多種意義，一根籌就被確定或放到另一位置。如果這根籌是從鄰位借出的，它得"還清"(paid back)。在 pati 算板上所作運算中消去和補值都是容易實現的。

① 唐乾元(758)前爲太史局，後爲司天臺，明、清爲欽天監。——譯者注。《新唐書·曆志》稱"九執曆者，開元六年，詔太史監譯之。"又據《新唐書·百官志》開元十四年改太史監爲太史令。——校者注。

② 《九執曆》的中譯本保存在《開元占經》一百零四卷中。——校者注。

③ 據 1977 年長安縣北田村發現的瞿曇巽墓志，他的父親是悉達，祖父是瞿曇羅。——校者注。

在印度和中國諸多的乘法算法裡，在婆什迦羅的《利拉瓦提》[9]中的 sthan-khanda 法與楊輝的《乘除通變算寶》(1274)中的相乘法有共同的特徵，如下所示：

1	3	5
12		
12		
3	6	
	6	0
16	2	0

乘數被當成一個完整的數，運算從左邊開始。正象藍麗蓉(Lam Lay-yong)假設的那樣："我們的乘法法則在中世紀叫棋盤法，起源於這種算法。"[10]她還指出早期意大利人把乘數分解成因子的方法稱爲"repiego"法，印度人在628 年就已知之，而此法中國人早已熟知，并據因子類型之不同而稱爲"重因"、"重乘"和"重加"。

甘內撒(Ganesa)在 1545 年評論《利拉瓦提》時將乘法中的 gelosia 法取了一個名字 kapata-sandhi。這種 gelosia 法，或格柵(grating)法，還以四邊形法或分格法(the method of the cells)而知名，很可能起源於印度[11]。此法也出現在 14 世紀阿拉伯著作和大致同期的歐洲著作中。史密斯(Smith)認爲此法可能從印度向北傳人中國，出現在程大位 1592 年的《算法統宗》上[12]。中國人稱之謂"因乘圖"或"鋪地錦"。425 乘 456789 如下左圖所示：

	4	2	5	
1	1/6	/8	2/0	4
9	2/0	1/0	2/5	5
4	2/4	1/2	3/0	6
1	2/8	1/4	3/5	7
3	3/2	1/6	4/0	8
5	3/6	1/8	4/5	9
	3	2	5	

中國籌算除法與 4 世紀印度在算板 pati 上作的除法有許多共同特點。下例 1620 除以 12，引自文獻[4]，闡明了印度的除法[13]：

1	6	2	0
1	2		

除數 12 置於被除數之下；商的第一個數字 1 置於右邊，擦去 16，其位置由餘數 4 取代。除數向右移一位。

4	2	0	1
1	2		商數綫

數字 42 除以 12，商數 3 置於商數綫上，去掉 42，其位置由餘數 6 取代。除數再向右移一位，於是：

6	0	13
1	2	商數綫

繼續做除法，將商數 5 同前一樣置於商數綫上，去掉 60，沒有餘數。商數上的 135 就是所求結果。

中國和印度的除法的共同特點是：(1)除數位於被除數之下，(2)每得一商，除數向右移一位，(3)商數排列在被除數之上。在歐洲直到 15 世紀還把除法看作是一種困難的運算[14]，用計數板在 pati 上去掉數字的簡明方法使中印數學家們做起除法來輕松自如。據信這種除法後來是從印度傳入歐洲的[15]。

在印度對世界的數學貢獻中，最有意義的是印度-阿拉伯數字體系。它是因印度發明、阿拉伯人傳入歐洲而得名的，其特點是有 9 個數字和零的符號，數字各具一定位值以表示所有整數。從一項對古印度使用的各種形式數字的調查[16]來看，從阿育(Asoka)王之前(公元前 3 世紀)就逐漸發展起一種類似於今日印度-阿拉伯數字的形式。值得指出的是，在所有這些數字體

系中前三個整數的寫法正好同中國的完全一樣。然而應當注意，在最古老的印度銘文中我們發現的數字符號既無零也無位值的含義，也就是從一到九，十、百、千及其倍數各有獨立的記法。據信前九個符號最早出現在公元 595 年的一塊銘文中（Sankheda 授給 Gurjara 的金屬牌）[17]，由此時到 9 世紀末的期間內，大約 20 塊銘文使用了這些符號[18]。盡管銘文的證據同印度古代位值制相牴牾，看來可以確認位值制在公元 5 世紀早年《波利薩·悉德罕塔》（Paulisa Siddhanta）的作者已知道并有應用，一定是在 Aryabhata 和 Varaha-Mihira 的時代（公元 500 年之前）。

對於零的概念，印度人所用的術語是"空"（sunya，emptiness）和"點"（bindu，dot）。無容置疑，最早的零的符號出現在 876 年在格瓦略（Gwalior）的一塊銘文中。可以肯定零最初是個空位，然後是個點，最後才是圓圈符號。

據李約瑟（J. Needham）講，在中國早已開始認識了位值概念[19]。最早顯示十進位的嘗試很可能出自公元前 330 年的《墨經》。中國人在度量衡單位中應用十進制特別先進。自公元初年隨着在所有數學運算中使用算籌以來，對位值的理解已充分地牢固樹立起來。3 世紀《孫子算經》對位值制作出了解釋。中國人在用算籌數字進行的所有計算中，留下的空位都表示零。當瞿曇悉達在 718 年把印度的 Navagraha 曆法譯成漢語時，這種位值制被引入印度的記數法[20]。在譯文中出現的零是個點而非圓圈。在印刷物中用圓圈符號表示零首先是在 1247 年秦九韶的《數書九章》裡發現的。三上義夫（Mikami）認爲零的符號至少還要早一個世紀已在中國應用了[21]。一般認爲零的符號起源於印度，但這種零的符號在中國還有獨立的發展，這是基於 8 世紀前零的位置是空位這一事實而言的。在籌算中擺出空位表示零會引起混淆，故可能用一個四方形符號，而用中國毛筆寫時就很容易畫成一個圓圈了。

盡管在 8 世紀印度數字已傳入中國，但并沒有被采納。看來令中國人感興趣的是非常大和非常小的數字概念。《數術記遺》（約 190 年）和《孫子算經》（3 世紀）已給出十個術語來表示大於萬的數，朱世傑 1299 年的《算學啓蒙》又添加了另外六個，最大的表示 10^{44}。這些術語是按佛教的思想創立的；同樣地，朱還增加了十五個術語以表示非常小的數字[22]。

分數是數學裡的基本和重要的部分。印度史料表明早在公元 200 年分數就象今天的一樣了，只是沒有橫綫[23]。所有包含分數的運算在巴克斯哈里（Bakhshali）手稿中均可找到，它的寫作時代有不少推測，範圍在 3 世紀到 12 世紀間[24]。盡管從 5 世紀印度人的天算著作中已涉及到多種形式的分數，而化簡公分母的法則和求最小公倍數可分別在 6 世紀的婆羅門笈多（Brahmagupta）和 7 世紀的馬哈維拉（Mahavira）著作中找到[25]。在中國非常早的年代數學家們對使用分數也感到困難，約在《九章算術》（公元 100 年）成書的時代，分數加減乘除的法則已經形成公式。到 13 世紀，中國人在處理分數、特別是求分母的最大公約數和最小公倍數方面有了極大的進展。這種方法在歐洲直到 15—16 世紀才被應用[26]。

有趣的是，在巴克斯哈里手稿中假分數的全部分子都寫在分母之上，這與中國表示假分數完全相同。在這兩國裡下面的分數四則運算過程也是完全一致的[27]：

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd},\quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-cb}{bd},\quad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\quad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

印度人和中國人不僅在他們的數學著作中對分數運用自如，而且也都採納了負數的概念。

印度人引進負數表示負債，這時正數表示資財。第一個著名的用法是由婆羅門笈多在約628年提出的，他僅說明了負數四則運算法則[28]。在中國，正負數的概念看來是從"得"、"失"的概念中引申出來的。這在《九章算術》一道買賣動物的問題中可清楚看出：賣價被看成是"正"的，因爲得了錢；而買價被看成是"負"的，因爲花了錢[29]。……古代中國人在籌算中具體地用紅色和黑色的籌表示正負，兩者間的加減規則形成了公式并明文寫出。《九章算術》提供了具體證據：中國人在1世紀不僅接受了負數的有效性，而且還理解它與正數的關係，以及能夠用正負數運算。然而，中國人没有注意負數平方根的性質，但印度人如馬哈維拉和婆什迦羅卻意識到這一點[30]。

爲解決大量有關比例的問題，印度和中國數學家們發明了一種相同的解法，印度人稱之謂"三數法則"(the Rule of Three)，而中國人則稱之謂"今有術"[31]。印度名字的意思是"三項"，可追溯到公元初年巴克斯哈里手稿、在《阿約布哈提亞》(Aryabhatiya)和其他有關數學著作中[32]。婆羅門笈多曾把這個法則作出如下解釋[33]：

"在三數法則中pramana(自變數)，phala(結果)和iccha(需求)是已知的三項，前後兩項必須一致。需求乘以結果除以自變數，得到需要的結果。"即

$$(\text{所求的})\text{結果}=\frac{\text{需求}\times\text{結果}}{\text{自變數}}$$

中國的"今有術"用於解比例問題，通過三個已知項求未知數，這些項稱爲"所有數"和"所求率"。法則表明，把"所有數"和"所求率"之積作爲"實"(被除數)，把"所有率"作爲"法"(除數)，即可得到"所求數"。

李約瑟曾正確指出中文和梵文的術語在語義上的等價性[34]。中文裡"實"的基本含義相似於梵文中的phala(結果)，"法"和pramaha在表述計量長度的標準單位時兩者也是相似的，甚至"所求率"與意爲"需要"、"要求"的iccha也是一致的。

顯然，由於這個法則對解決常見問題的簡明性和通用性，它受到印度人和中國人的高度評價，事實上被兩國商人廣泛應用。它的印度名稱更貼切、更準確，所以在傳入其他國家時，便廣爲人知。因此，該法則的起源一般歸於印度，可能在8世紀傳到阿拉伯，後來傳到歐洲。在歐洲它受到高度珍視，被稱爲"黄金法則"。

在林語堂(Lin Yutang)编著的《印度的智慧》中，他指出印度是"世界三角學之師"[35]。盡管在評論中他熱切描寫"印度精神的豐富和她的靈性"，但卻顯得言過其實。然而，林語堂正確指出了印度人在數學方面的卓越貢獻。李約瑟也認爲，正是印度人把三角學變成了現代的形式[36]。正餘弦早期的概念首次出現在公元400年後不久的《波利薩·悉德罕塔》中。阿耶波多(Aryabhat，510)第一次給正弦函數起了個特殊的名字并求出完整的正弦表。這個表用一個地道的簡單方法。正弦90°等於半徑或3438，顯然由關係2×3.14r＝21600而獲得。圓分成四個象限，每個有90°和5400′，全圓就分成21600份了。每個象限還分成24等分，各包括225′，等於3.75°，於是24分弧的正弦表便可算出。

718年瞿曇悉達通過翻譯Navagraha天文體系將這個正弦表介紹到中國。藪内清(Yabuuti Kiyosi)在研究這一體系的譯文時發現，中國的《九執曆》不是Navagraha體系的直譯本[37]。

印度譯者精確地把觀測點從北緯23°2′的尤加因(Ujain)改到北緯36°16′的唐朝首都長安,以便於預報中國的天文現象。然而中國的天算家感到翻譯的體系奇怪而陌生,沒有採納它[38]。

古代中國人并不了解三角學這個詞的真實意義,但他們非常熟悉直角三角形的性質,并認識到各邊之比的重要性。"重差術"涉及到相似直角三角形的性質,可以看成是一種早期的三角學。這樣,在實際運用平面三角時勾比弦等於正弦、勾比股等於正切,弦比股等於正割。由於數學天文學的發展,曆法精度要有基本保證,這促使象唐朝一行那樣的曆法學者去尋求改進三角技術。當一行受唐朝皇帝之命制新曆以取代725年的舊曆法時,他事實上將印度三角知識和正弦表應用於研究數據中計算和分析等方面。近來古克禮(Cullen)認爲一行《大衍曆》中的一張函數表等價於一張用三階有限差分法制成的正切表[39]。古克禮解釋說,這張表明顯是在印度應用正弦的知識的基礎上取得的獨立的發展。但是,因一行構造此表爲的是一個實際的目的,而并沒有作爲一項理論的分析,因此沒有數學家接續對三角術作進一步研究。這樣,8世紀從印度傳入三角學的這一方面沒有在中國生根。

以希臘人畢達哥拉斯(Pythagoras,前540年)的名字命名的勾股定理已是家喻户曉的了,但此定理是否首先由他證明仍是遺留問題。許多數學史家認爲它是最深刻的概念之一,并且是數學史上的一個重要的里程碑[40]。

在古代印度和中國,數學家們研究勾股弦的關係素來是有特殊興趣的課題。《吠陀》(Vedic)時的印度人已熟悉"畢達哥拉斯數",即正整數a,b,c滿足關係$a^2+b^2=c^2$。這在《蘇爾巴·蘇特拉斯》(Sulba Sutras)中有證據,該書編寫年代估計在公元前800年到500年間[41]。盡管印度的勾股定理早於畢達哥拉斯,然而赫斯(Heath)堅持認爲,沒有證據或任何可能說明希臘人是從印度學來的,他强調該式是在這兩個國家完全獨立獲得的[42]。

在中國,勾股關係記錄在《周髀算經》中,有討論而非證明,結尾說它已被禹充分使用。……此書積累了不少數學資料,可追溯到公元前5世紀。當趙君卿寫書評(估計在3世紀)時,他提供了一個證明。……有趣的是,印度的婆什迦羅(約1150)給出了該定理的一個類似的證明。布銳兹奈德(C. A. Bretschneider)推測,畢達哥拉斯的證明其實也是同樣的[43]。給人印象最深的是應用這條定理的相似性。例如在婆什迦羅的書中有這樣的例子[44]:

"一竹高於地平32腕尺,爲疾風所折,竹梢着地,離根16腕尺。此竹斷處高有多少?"

這個問題與漢朝《九章算術》的一個問題類似:

"今有竹高一丈,末折抵地,去本三尺。問折者高幾何?"[45]

婆什迦羅的著作基本上是一本教科書,取材於他的前輩的著作,特别是婆羅門笈多(約628)和馬哈維拉(約850)。達塔(Datta)説,先於婆什迦羅也有類似的問題,盡管不全是"竹"的問題,在馬哈維拉的Ganita-sara-samgraha和Prthuda-kasavami(約860)的有關婆羅門笈多著作的注釋中均有發現[46]。馬哈維拉和Prthudakasavami雖爲同時代人,但前者住在Mysore的南部,而後者住在很靠北的Kananju。盡管他們所舉某些例子具有① 引人注目的相似性,但達特認爲這兩個數學家住在次大陸的兩端,不可能互相影響對方。達特傾向於認爲他倆各自獨立設計并解答題目。

① 原文爲"沒有",據文意改。——譯者。

然而考慮到以上兩人的著作中某些問題引人注目的相似性，似乎更有理由認爲他們的靈感是從共同的源泉——有可能是從中國獲得的。

評述中印間可能的數學聯係如不涉及不定分析將是不完整的，早期中印數學家對該問題都有巨大興趣。該題目的起源也吸引了許多數學史家的注意，并仍有不少有爭議的論題[47]。有三種理論一直在討論。19 世紀初科爾布魯克(H. K. Colebrooke)提出一種理論，認爲在很早的時代印度人已得到不定問題的一般解。他的觀點得到森的支持，并從《蘇爾巴・蘇特拉斯》中舉出例子，説明印度人對不定問題的興趣可追溯到公元前 5 世紀[48]。凱(B. K. Kaye)和其他一些人擁護希臘起源説，把印度解法歸因於希臘影響[49]。另一方面，李約瑟則把這種方法歸於中國人的發明[50]，并進一步指出歐洲人只是在 9 世紀才知道這種不定問題。雖然如此，這些問題只不過被當成普通的迷惑人的難題而已。

森聲稱印度人對不定分析的興趣早在公元前，看來這是不能令人信服的。他舉出的問題是如何用三種尺寸的磚來砌築祭壇，由它可列出如下的一階聯立不定方程：

$$x+y=21$$

$$x/m^2+y/n^2=1$$

m 和 m 是聖壇一邊的整數部分。解法没有給出，但對 x=9，y=12 時 m=6，n=4 是已知數值；當 m=3，n=6 時 x=5，y=6。

在前述《九章算術》里也有這樣一個不定問題，可表示成如下的方程組：

$$2x+y=w$$

$$3y+z=w$$

$$4z+u=w$$

$$5u+v=w$$

$$6v+x=w$$

以上所示確實是一不定問題，但是所提供的解法與一般不定方程的解法是不同的。

最早的不定分析問題出在 3 世紀《孫子算經》中：

“今有物不知其數，三三數之剩二，五五數之剩三，七七數之剩二，問物幾何？”

孫子的解可歸納成如下形式：

$$70\times 2+21\times 3+15\times 2-105\times 2=23$$

孫子問題在 1839 年由畢歐(E. Biot)和 1852 年由偉烈亞力(A. Wylie)帶到歐洲，變成了著名的“中國剩餘定理”[51]。但孫子所給解的數字易於猜出，而且孫子僅給一題，故他并非必然導出如下綫性同餘式組的解法：

$$N\equiv 2(mod3)\equiv 3(mod5)\equiv 2(mod7)$$

十分有趣的是，5 世紀末老阿耶波多(Aryabhata Ⅰ)在他的《阿耶波提亞》(Aryabhatiya)中給出的問題與孫子問題類似[53]：

“有一數，被 8 除餘 5，被 9 除餘 4，被 7 除餘 1，求此數。”

阿耶波多提出的解法叫“庫塔卡”(kuttaka)，解釋的文字十分簡明。此法隨後由婆什迦羅、婆羅門笈多、馬哈維拉、小阿耶波多(Aryabhata Ⅱ)，小婆什迦羅和其他數學家一再修改完善。

另一方面，中國剩餘定理即綫性同餘式組的特殊形式直到 13 世紀中葉秦九韶時代才得到

充分的研究。然而在5世紀張丘建提出了另一類型的不定問題，即有名的“百鷄”問題[52]：“今有鷄翁一，直錢五，鷄母一，直錢三，鷄雛三，直錢一。凡百錢買鷄百隻，問鷄翁、母、雛各幾何？”張丘建找到了正確的解，但他的方法没有完全表達出來。後來不定分析逐漸得名“大衍”。到秦九韶的時代形成解不定問題的一般方法差不多用了十個世紀。由於這個原因，某些數學史家，諸如赫師慎(L. van Hee)、洛里亞(G. Loria)和漢克爾(H. Hankel)對大衍術的獨創産生了懷疑。森甚至提出：“在不定分析及其應用於天文學的方面，如果在印度和中國間曾有引進的話，那麼不是印度而是中國處在接受的一方。”[55]

李倍始(U. Libbrecht)寫出了有關中國剩餘定理的專題論文，對從孫子時代到19世紀該問題進行了逐字逐句的分析[54]。他也作出了相似的努力去研究印度“庫塔卡”法的歷史發展。基於内在的分析，他對比研究了兩種方法，由此他相信中國的大衍術不同於庫塔卡法。

李倍始的研究依據内在的分析，闡明了大衍術和庫塔卡法間的複雜的問題，爲建立數學思想的歷史關係作出了良好的範例。這項研究需要足夠的數據，客觀的審慎，綜合概括的事實。這篇論文是一篇初步的概括，企圖説明中印數學間平行的發展和共同的特徵。毫無疑問，自從絲綢之路的開闢和佛教傳入中國的影響，中印知識分子大量接觸，數學思想經由商人、香客和學者爲兩國數學家們所互相理解，數學家們彼此間的影響也不可避免，正如中國諺語所説“取人之長、補己所短。”然而不應忘記：獨立成長的數學體系間自然會有許多相似點，也會有許多差異。當然，兩者完全一致的發展模式則是不可能的。兩者的聯係豐富了印度和中國古代的數學，這一領域將是一個饒有興趣、有待進一步研究的課題。

參　考　文　獻

〔1〕《漢書》，中華書局，第61卷，2690。

〔2〕Loewe，Michael，漢朝的危機和冲突，倫敦，1974，22。

〔3〕S. N. Sen，古代和中世紀印度與外國科學觀點的交流，印度科學史會議論文集，加爾各答，1961，21。

〔4〕Cheng Te-K'un，中國人的世界——人類諧調的斗爭，中文大學出版社，香港，1980，131。

〔5〕何丙郁，印度科學在東亞，泰米爾人研究首屆國際會議論文集，第1卷，吉隆坡，1968，39～52。

〔6〕B. Datta & A. N. Singh，印度數學史，第1部分，拉合爾，1935，4。

〔7〕據《周禮》，“六藝”指禮、樂、射、馭、書、數。

〔8〕見〔6〕，131。另見洪天賜，中國籌算，漢學研究論文，第1卷，馬來亞大學，吉隆坡，1977，97～109。

〔9〕同〔6〕，147.

〔10〕藍麗蓉，對楊輝算法的批判研究：13世紀中國數學論文，新加坡大學出版社，1977，209。

〔11〕Smith，D. E.，數學史，第2卷，波士頓，1925，114～116。另見〔6〕，144。

〔12〕何丙郁，理、氣和數：中國科學和文明導言，香港大學出版社，1985，106。何認爲gelosi

法由穆斯林世界傳入中國。

〔13〕同〔6〕,152～153。

〔14〕同〔11〕,第 2 卷,132。

〔15〕同〔10〕,230。基於時間的因素,據信除法起源於中國,先傳入印度,後傳入歐洲。

〔16〕同〔6〕,19 頁以後。

〔17〕同〔6〕,40。

〔18〕W. E. Clark,印度-阿拉伯數字,紀念 Charles Rockwell Laman 的印度研究,哈佛大學出版社,1929,223。Clark 進一步指出,這 20 個銘文中印度 epigraphists 認爲有些是後來僞造的,有的可疑,有的則是真品。其中多數是刻在銅板上的封地牌。通常封地是國王對某些個人或團體特殊效勞的答謝,免除稅收。當然就產生了不小的誘惑去僞造這種封地牌。

〔19〕李約瑟,中國的科學和文明,第 3 卷,劍橋大學出版社,1959,8。

〔20〕藪內清,中國中世紀科技史研究,東京,1963,51～96。此書給出印度體系的《九執曆》的漢譯本的英譯。

〔21〕三上義夫,中日數學的發展,丟布納,來比錫,1913,73。

〔22〕錢寶琮,中國數學史,北京,1964,115～116。內容更詳細。

〔23〕同〔6〕,188。籌算曾出現於阿拉伯數學,見〔11〕,第 1 卷,215。

〔24〕巴赫沙里數學,一本佚名算術書,1881 年在印度西北 Bakhshali 出土,有 70 頁樺樹皮,是不完整的抄本,寫於 8 世紀的古老手稿。

〔25〕同〔6〕,189～195。

〔26〕同〔10〕,195。

〔27〕同〔6〕,185 頁以後;另見〔22〕,110。

〔28〕Kline,M. ,數學:必然性的喪失,紐約,1980,110。

〔29〕藍麗蓉、洪天賜,最早的負數:它怎樣在方程組的解中出現,國際科學史料,意大利 Delta 百科全書學院,羅馬,1987,222～262。內有負數概念的詳細討論。

〔30〕同〔28〕,110;另見〔19〕,91。

〔31〕同〔6〕,第 I 部分,203;另見錢寶琮編,九章算術,北京,1963,第 2 章,114。

〔32〕同〔6〕,203～204。

〔33〕同〔6〕,205

〔34〕同〔19〕,146。

〔35〕林語堂,《印度的智慧》,孟買,1955,11。

〔36〕同〔19〕,第 3 卷,108。

〔37〕藪內清,印度和阿拉伯天文學在中國,人文科學研究所 25 周年文集(Silver Jubilee Vol.);京都,1954,589。

〔38〕《新唐書》,中華書局,1975,第 28 卷(B),691～692。

〔39〕Cullen,C. ,一張 8 世紀中國的正切表,中國科學,費城,1982,第 5 卷,1～33。

〔40〕藍麗蓉、沈康身,古代中國的直角三角形,精密科學史史料;第 30 卷,2 號,1984,87。

〔41〕Datta,S. ,Sulba 的科學,加爾各答,1932,104～119。

〔42〕Heath,T.,希臘數學史,第1卷,牛津,1921,147。

〔43〕同〔41〕,118。

〔44〕Srinivasiengar,C.N.,古代印度數學史,加爾各答,1967,87。

〔45〕洪天賜,中國人對直角三角形的興趣,數學史,第5卷,紐約,1978,260～261。

〔46〕Datta,S.,關於婆羅門笈多應感謝九章算術的假設,加爾各答數學會公報,第22卷,1930,40～42。

〔47〕Datta,B.,印度不定分析源流,國際科學史史料,第13卷,1931,401～407。另見Ganguli,S.,印度對一元不定方程理論的貢獻,印度數學會雜志,第19卷5期,1931,110～120;6期,130～142;7期,1932,153～168。另見Sen,S.N.,古代印度不定分析研究,第十屆國際科學史會議論文集,第1卷,Ithaca,1964,493～497。另見王鈴,孫子算經的時代和中國剩餘問題,出處同上,489～492。另見李倍始,13世紀中國數學,MIT出版,1973,214～413。

〔48〕見〔3〕,1964,493。

〔49〕同上。

〔50〕同〔19〕,34～119。

〔51〕洪天賜,中國人對不定分析和不定方程的興趣。Majallah Pantai,吉隆坡,1971,105～106。

〔52〕同〔47〕王鈴,489。

〔53〕Kripa Shankar Skukla Ld., Aryabhatiya of Aryabhata,第1部分,新德里,1976,75。

〔54〕洪天賜,Cheng Ch'iu-chien數學手册研究,吉隆坡,1967,235頁以後。有興趣指出,12世紀婆什迦羅的著作中發現了類似的問題:5隻鴿重3特(特拉姆),7隻鶴重5特,9隻鵝重7特,3隻孔雀重9特。要帶來100隻鳥重100特,以博得王子的歡心。

〔55〕見〔3〕,496。

〔56〕同〔47〕,李倍始,214頁以後。

(譯自Ang Tian Se, The Mathematical Link between China and India, Papers on Chinese Studies, University of Malaya, Vol.4, Dec.1990,pp.21－47。譯文經编者作少量删節。羅飛今譯,馮立昇校。)

中國傳統數學對日本和算的影響

那　日　蘇
（內蒙古師範大學科學史研究所）

由於地理位置鄰近，中國與日本很早以前就在包括數學在內的文化方面有着特殊的關係。日本受中國傳統文化的影響程度，只要看看日本文字的產生和發展就可想而知了。同樣，日本的傳統數學"和算"也是在中國傳統數學影響下產生和發展起來的。中國數學首次大規模傳入日本是在隋、唐時代。此後，一直到 17 世紀初，日本的度量衡、曆法、日常行政、各種工程及社會生活方面的數學計算問題都是沿用中國算書中的數學方法。從 16、17 世紀之交開始，中國的元、明數學及其後的清代數學逐漸傳入日本，使得日本於 17 世紀初產生了自己的傳統數學"和算"。但起初的"和算"也只是中算在日本實際中的應用。但不久，日本的和算家很快將和算推向發展高峰，產生了許多優秀的和算家，如關孝和、建部賢弘、和田寧等等。他們首創行列式、貝努利數、霍納法等，成績卓著。到 19 世紀中葉以前，和算甚至走到了微積分的邊緣。但此時西方文化大量傳入，西方近代數學也以不可阻擋之勢，很快便取代了和算。和算在昌盛了三百多年之後，迅速退出歷史舞臺，讓位給西方近代數學。本文謹對中算傳入日本的經過，及其對和算的產生和發展所起的作用和影響，做一簡要論述

中國傳統數學首次傳入日本

中國傳統數學於很早以前就隨着文化傳播到了朝鮮，後來又從朝鮮傳到日本。在日本和朝鮮有關古代曆法、算術的記事中可以找到記載。在 6 世紀以前，中算經朝鮮傳入日本的情況，因文獻很少，所以不太清楚。公元 372 年朝鮮的高句麗（朝鮮三國之一）始建國學制度。同時，有關漢學教育也很興盛，如《五經》、《史記》、《三國史》、《晉陽秋》等中國典籍廣爲流傳。有關醫、藥學、藥理學、兵學方面的技術書和曆書、算書等也被介紹到朝鮮[1]。而朝鮮與日本也早有文化往來。4 世紀時，朝鮮的百濟國曾派阿直岐、王仁等學者東渡日本給皇太子講授《論語》和《千字文》[2]。513 年百濟的五經博士段揚爾赴日本講學[3]。553 年日本方面請求朝鮮定期派遣醫博士、易博士、曆博士赴日本講學，並同時請求輸入各種占卜書、曆書及各類藥物[4]。554 年百濟的易博士王道良應日本方面要求赴日講學，同年曆博士王保孫也赴日講學[5]。602 年百濟僧人勸勒以曆書、天文書、方術、遁甲書等教授日本學生[6]。由此可知，早在唐以前中國的傳統數學知識就隨曆法等逐漸傳到朝鮮和日本，日本數學史家三上義夫認爲，此前中國的《說文》中所載的記數法就傳到日本了。到隋、唐時期，中日間的間接文化交流變爲直接的、大規模的交流，并很快達到鼎盛時期。日本推古天皇時代聖德太子攝政期的 607 年，始派以小野妹子爲代表的遣隋使節團[7]。614 年犬上御田鍬作爲遣隋使赴隋；630 年犬上作爲首次遣唐使再次赴中國[8]。此

後，直到894年，共任命過19次遣唐使。遣唐使的人數逐漸增多，一次爲100至250人，最多時達500多人。其中包括許多留學生和留學僧。他們在中國學習包括天文、曆法、數學、醫學、倫理、政治、哲學、佛學等等在内的文化。歸國時并將有關這些方面的書籍、工具實物等帶回日本。如：唐代，日人吉備朝臣於公元717年來我國留學，滯留中國16年之久，歸國時帶走《大衍曆經》一卷、《大衍曆立成》12卷，測影鐵尺一枚等[9]。日本於690年開始使用中國《元嘉曆》，而後使用過《麟德曆》、《大衍曆》、《五紀曆》等中國曆法。861年始用唐《宣明曆》直到江戶時代(17世紀)。同時，日本直接采用了唐代度量衡制度[10]。伴隨曆法、度量衡等的傳入，初步的數學知識，如上述曆法中使用的内插法等也傳入了日本。同時，日本也仿唐制試建立算學制度。662年至686年間，設立培養官吏機構，置算博士2人，算生20人，建刻漏臺和占星臺[11]。但關於具體的數學知識的傳入及算學制度的正式化、規範化的正式記載則要晚一些。日本於702年發布大寶律令，718年發布養老律令。這是日本全面仿照唐朝制度建立的政治、文化及整個社會生活方面的法律和規章。其中大寶律令已失傳，其主要内容均包含在養老律令中，所以可從現存的養老律令中了解當時有關情況。833年版的養老律令的注解書"令義解"中明確記載着有關大學寮、圖書寮、曆學、天文學及博士、學士、考試方法、大學課程等的規定。其中，養老律令的"學令"中關於大學寮制度規定："大學寮置算博士2人，算生30人。……凡大學生，取五品以上子孫，及東西史部子爲之。若八品以上子情願者允。學生取郡司子弟爲之。并取年13以上16以下聰令者爲之。"[12]。同時規定如下9種算書爲大學寮學生的數學教科書。"凡算經，孫子、五曹、九章、海島、六章、綴術、三開重差、周髀、九司，各爲一經，學生分經習學。"†[13]由上可知，日本於702年始，仿照唐制建立了正規的數學教育制度，爲政府培養有關曆法、天文、貨幣、土木工程、土地測量、租稅計算、會計等行政方面的專業人員。學生則來源於官僚子弟中13歲至16歲者。在上述9種教科書中有6種，即《周髀》、《九章》、《孫子》、《海島》、《五曹》、《綴術》爲唐代國子監中的法定教科書，其中除祖冲之的《綴術》外，均流傳至今。另外3種：《六章》、《三開重差》、《九司》在中國算書目錄中沒有出現過。但《三開》和《六章》在朝鮮文獻中有記載。朝鮮《三國史記》(金富軾奉敕撰)卷38，"職官上"的"新羅國學"一節，有"以綴經、三開、九章、六章教授之"，同卷中"雜志七"一節有"算學博士或助教一人以綴經、三開、九章、六章教授之"的記載。其中《綴經》一書即祖冲之的《綴術》。由此可知，這4種算書是當時(7世紀中後期)朝鮮國學中的教科書。朝鮮於唐代初期派遣唐使來中國考察有關國學制度，回國後仿照唐制建立了國學(指新羅於667年統一朝鮮後的682年始正式建立的國學制度)。在國學中以上述4種算書教授算學。《綴術》和《九章》是直接引用唐代國子監的教科書，而《三開》與《六章》則非中國算書。但考察其内容，則包括田畝、耕作、租稅、谷物交换、工藝品、利息、運輸等方面，均不超出《九章》的範圍。由此可推斷，當《九章》等書傳入朝鮮後，朝鮮數學家聯係當時社會現實所需要的數學知識，對《九章》中一部分適應現實的内容做了修改、删減而簡编成《三開》和《六章》兩部算書以供社會之需要[14]。唯《九司》一書找不到其他記載，不知其來歷。另外，日本也仿照唐制將算學生分爲初級和高級兩個班。初級班學習：《九章》、《海島》、《周髀》、《五曹》、《九司》、《孫子》、《三開》等7部算書。結業考試爲，從《九章》中出3題，其余6部算書中各出1題，共9題。若學生全部通過，則爲甲等；若只通過6題，則爲乙等；但若《九章》3題没通過的話，則其余6題全通過也不

† 李儼先生在其文《中算輸入日本的經過》和《唐代算學史》(見《中算史論叢》第五集)及《唐宋元明數學教育制度》(見《中算史論叢》第四集)中，將《三開重差》一部誤爲《三開》和《重差》二部，將日本大學寮數學教科書誤爲十部算經。

能畢業[15]。高級班學習《綴術》和《六章》。考試從《綴術》中出6題,《六章》中出3題。若《六章》没通過的話,即使《綴術》全通過也不能畢業。兩個班學制均爲7年。日本國學的大學寮算學教科書中没有包括《張邱建算經》、《夏侯陽算經》、《緝古算經》、《數術記遺》和《三等數》等五部算書。但這些算書并不是没有傳入日本。平安時代(805年至1191年)前葉,875年冷泉院失火,藏於秘閣中的書籍全部化爲灰燼,當時痛感有必要將現存典籍書目編輯成册。於是,宇多天皇寬平年間(889年到897年),藤原佐世奉旨撰寫《日本國見在書目錄》,以上幾種算書均有記載[16]。綜上所述,隋、唐時代日本大規模引入中國數學教科書和數學教育制度。但這并不是全盤照搬,而是從中國引進算學制度和選擇部分教科書,同時又參照引用朝鮮數學教科書中適合自己的部分。

另外,日本與唐代情况大致相同,算博士的地位很低,與陰陽寮的曆博士同等,較醫博士、陰陽博士、天文博士要低一等。大學寮的算學教育主要是培養從事田畝測量、度量衡、租税事務等日常行政方面的低級官員。算學生畢業後從事主政、主帳、算師等職務。這些日常事務主要用《九章算術》的前三章(方田、粟米、衰分)及《孫子算經》和《五曹算經》就可以應付了。所以,象《綴術》那樣高深的内容就極少能應用於實際。因此,逐漸不爲人們所掌握,最終導致失傳。這與此書在中國失傳的原因也基本類似。

從日本的飛鳥、奈良時代(604年至794年)開始傳入的中國算書,一直到平安時代中期都有記載。當時唐代算書幾乎全部傳到過日本[17]。但由於後來兵禍戰災,社會動蕩,到江户時代初期(17世紀初)中國元、明數學傳入之前,這些隋、唐古算書大多已失散。後人祇能從一些日本古籍片段中的零星記載來研究這段時期的日本算學及中日數學交流的情况了。

自8世紀初,日本仿照唐制建立國學大學寮施行正規算學教育,并引用唐代和朝鮮算書作教科書以來,直到江户時代初期的約九百年間,數學在日本没有産生實質性的進展。這從以下事實可以得到一些證明。14世紀著作的《二中曆》中記載有自10世紀初以來到14世紀間的算博士37人名錄[18]。但這些算博士中没有一人著過算書,只有某算博士做了某官的記載。這一時期僅有幾本記載有淺顯算術知識、問題片斷的書。最早的是970年源爲憲爲左親衛相公藤原爲光的兒子松雄(當時7歲)進行教育而編集的《口游》①。另外,還有與足利義政同時代的左大臣實熙公所著《拾芥抄》。這兩部書中都有九九表,其順序與唐以前的中國九九表一致,均爲從九九八十一開始。朝鮮算書直到近代大多仍是如此。在《口游》中的記載,是從8世紀到16世紀間的日本文獻(中國和朝鮮傳入的算書内容除外)中唯一的數學問題。即"今有竹束。周員二十一。問物數幾。曰四十八。術曰,置周員加三算,自乘得五百七十六,以十二除得四十八。"[19]。這是一個中心爲3根竹,依次向外,每層爲9、15、21根竹,求共多少根竹。這是等差級數求前n項和的問題。

按題意,即 $3+9+15+21=48$。

設 n 爲項數,a_n 爲第 n 項,S_n 爲前 n 項和。

則 $n=(a_n+3)/6$

故 $S_n=n\cdot(a_n+3)/2=(a_n+3)^2/12$

① 李儼先生在其文《中算輸入日本的經過》中,將《口游》等書誤爲算書。《口游》爲當時貴族子弟初級教科書,内容很廣,算術爲極少部分。

此問題在唐代傳入日本的算書及中國算書中均無記載。《孫子算經》中的"方物一束"問題與此相似。另外,《口游》中有"今有妊婦可生子,知男女法",與《孫子算經》卷末的"孕推男女"問題基本相似。還有根據病人年令來判斷其生死的問題,"置九九八十一,加十二神得九十三,更加病者年數,所得以三除之。若有不盡者,男死女不死。若無不盡者,女死男生……",此問題在中國古算書中無記載。由此可知,一些在中國和日本均已失傳的中國古算書至少於平安時代傳到過日本。平安時代的有關數學文獻的綫索只能由《口游》和《日本國見在書目錄》而知了。到了鎌倉時代(12 世紀末至 14 世紀上半期),有關數學文獻就更少了,大概只有《孫子算經》,《九章算術》等還沒有失傳。僧人中嚴圓月和尚所著《東海一漚集》的卷五自傳中有:"春在池房,就道惠和尚,讀孝經論語,且學九章算法,秋歸大慈寺。"的記載。說明當時(14 世紀上半)至少在寺院中還教授學習算學。這與宋、元、明時代僧人們常乘坐通商貿易船,以經濟使節身份與中國交往,因此需要掌握一定程度的數學知識的情況相吻合。即自唐代算學傳入日本後,起初雖因社會的發展而興盛過一段時期,終因社會沒有爲數學的進一步發展提出迫切需求和創造條件,加之社會動蕩不安,致使傳入的中國數學逐漸衰落,沒能得到應有的發展。

日本自隋唐時代大規模輸入中國文化之後,很快就創造了日本文化史上的光輝時代,即飛鳥、白鳳文化(7 世紀)和天平文化(8 世紀)。此間,日本出現了最古的文學著作《萬葉集》,建造了世界現存最古的木造建築之一的法隆寺和至今完好並反映當時世界冶金技術水平的奈良大佛像,從一個側面也反映出當時的數學水平。但如上所述,10 世紀以後日本文化處於緩慢發展期,特别是從 14 世紀中葉至 16 世紀末的二百年間呈衰退狀。其中數學也不例外,算學制度名存實亡,幾乎沒進行什麼有效的數學活動,致使古算書大多軼失,所傳無幾。這段時期也可以說是日本古代數學的不振時期。

至此,中國傳統數學首次大規模傳入日本之後,經歷了:傳入→學習→廣泛應用階段,隨文化的衰退而告終。從隋、唐直到 17 世紀初葉,是日本應用中國數學的時期,解決日常社會生活中出現的實際問題,其主要特徵是,沒有出現日本人獨立著作的數學書,至多是將中算書删減改編以適合社會需要而已。整個數學水平沒有超出中國唐代算書的範圍。日本已故數學史家遠藤利貞在其遺著《增修日本數學史》中,稱此時期爲"中國數學採用時代"。

中國傳統數學第二次傳入日本

日本的傳統數學即和算是於江户時代初期,即 17 世紀上半葉中國元、明數學傳入之後誕生、發展起來的。進入 17 世紀後,日本各地的戰亂逐漸平息,社會生活進人和平穩定時期,隨之經濟逐漸趨向繁榮,社會對數學知識的要求愈來愈强烈。同時,與明朝的海外貿易也逐漸增多,在這種社會背景下,元、明數學開始傳入日本。首先,明朝的商業數學比較發達,珠算的應用處於昌盛期。由於海外貿易、通商的需要,算盤很快傳入日本。日本於 15、特别是 16 世紀以後,與明朝的通商頻繁,算盤大概就是那時傳入的。日本前田利家至今保存有據說是明代的算盤,實物爲上梁兩珠、九位。另外,1595 年版的拉丁、葡萄牙、日語對譯辭典及 1603 年版的日、葡辭典中均有:"Soroban",即日文中的"十露盤"一詞。雍州府志有"算盤,倭俗謂十露盤"和明末日本風土記中有日本人稱算盤爲"所六盤"的記載。"Soroban"爲"算盤"的發音之傳訛。但明代算書傳入日本的具體年代沒有明確記載。由 1627 年問世的和算書《塵劫記》中的許多内容是根據

《算法統宗》而來的這一事實，可以推斷至遲在此以前《算法統宗》就傳到了日本。其後還有《算學啓蒙》3卷、《楊輝算法》、《數學通軌》、《算海説詳》9卷、《算學群奇》、《桐陵九章捷徑算法》等算書，以及《授時曆》、《天文大成管窺輯要》79卷41册、《天經或問》等曆法方面的著作也傳入日本。這些著作在日本文獻中均有記載[20]，其中有些書籍已經失散。

日本數學史上最初的數學家是大阪人毛利重能，其生卒年代不詳，大約生活在1600至1650年前後期間。他於1622年著算書一册，起初没有書名，後人稱其作《割算書》。他早年學習算學，接觸過《算法統宗》，後移居京都教授算學和珠算法。《割算書》是日本現存最早的刊本和算書。其内容爲：簡單除法與乘法的互换（如 a÷12.5 改爲 a×0.08；a÷25 改爲 a×0.04 等）；平面圖形求面積；圓柱、圓臺、球等立體圖形的體積計算等。這是一部講授珠算法及其應用的初級教科書。由書中内容可看到明代數學的影響。此書首次將珠算除法歌訣收入爲内容，但將"二一添作五"的"添"字改爲"天"字；將珠算除法的"九歸法"之"一歸"省略，而從二始至九，并稱作"八算"。因是"割算"（即除算）之書，所以書中没有"九九"表及開平方和開立方。書中用日常生活常遇到的具體問題爲例，如：金銀兑换，米絹的買賣，利息，測地等等。在斤兩换算中也採用16兩的明制。圓周率用3.16，圓面積爲直徑的平方乘$\frac{\pi}{4}$（用0.79或0.8），等等。這部淺顯的實用性算書也是和算誕生的標志。因此書末有"右作直悉改事"字樣，及其他著作記載[21]，可推測在此書之前他還著有《歸除濫觴》一書，但已失傳。另外，還有百川治兵衛的《諸勘分物》（稿本）2卷（殘留第2卷）。其内容爲各種土木工程中的平面、立體圖形求面積、體積問題。π使用3.2，名詞術語，如將方錐、圓錐稱作四方底、圓底等等，均與中國古算書不同，也許是日本傳統算學知識的繼承吧。此書與《割算書》同年問世，但還没有前者影響廣泛。綜上所述，這部最早的和算書《割算書》是日本和算家在吸取中算法的基礎上，結合日本社會實際編撰而成的。

自毛利重能之後，和算家人材輩出，推動和算迅速進入獨立發展的繁榮期。毛利重能有三位高徒，今村知商、吉田光由和高原吉種。其中吉田光由（1598—1672）最爲著名，他於1627年初版《塵劫記》一書。當時正值日本内戰結束，人民希望安居樂業，文化呈現繁榮。此書作爲數學教科書而廣爲流傳，直到明治初期西方近代數學大規模傳入日本後，它才與和算一起退出日本數學領域。該書對日本傳統數學及數學教育的影響之大，可與《九章算術》對中算之影響相比擬。這一點可從以下事實得到證明。該書在廣爲流傳的二百多年間，經後人多次改編、增補而刊出的版本竟達四百多種，以至《塵劫記》這一書名已經成爲數學書的代名詞了。吉田光由先從師於毛利重能，後隨其外祖父角倉素庵學習程大位的《算法統宗》，晚年回到京都。這部在和算史上占有極其重要地位的著作，整理和總結了當時的數學知識，其中有相當部分是吸收或依據中算的結果。他本人對其著作參考、依據《算法統宗》一事，在1631年版的《塵劫記》跋文中有如下叙述："吾極少從師，今得汝思①之作，從中略悟一、二，以其爲基礎，以從師②之所得，將十八卷之一、二、三改作上、中、下，以爲初學者之入門。"[22]。由此可知，該書是集當時包括傳入的部分中算在内的數學知識之大成者，全書分上、中、下三卷。但後人改編、增補版也有五卷本的。1631年版本的主要内容爲，上卷：大數、小數之名數；九九數；買賣米；積木計算；金、銀、金幣的兑换；利息計算；絹、棉布的買賣。中卷：人子算；測地面積；木材買賣；房頂敷設；築堤、開溝的計

① 汝思即明代數學家程大位。
② 此處的"師"是指其外祖父角倉素庵。而"十八卷"也非毛利重能所錄"算法書十八卷"（見李儼著《中算史論叢》第五輯 P178），而是其外祖父抄寫的十八卷本《算法統宗》。

算等。下卷：鼠算；烏鴉算；日本國人口之男女數；百五減算；開平方、立方法等等。其中、小數命名法採用《算法統宗》的十進位法。大數命名法也是在此上加以改動而來的。書中還載有"九九"表，珠算除法歌訣及珠算指法操作的詳細說明圖。珠算除法的"實"與"法"在算盤上的位置與程大位的相反。金、銀、錢幣的兌換、絹、棉布買賣，利息等比例算與《算法統宗》粟布章算法相同。田地面積計算與方田章相同。比例配分算與衰分章，測量術與勾股章，堤、溝計算與商功章算法分別相同。另外，還有"孫子算法"，方陣、圓陣的作法，方程解法及在改編本中還有與《九章算術》一樣用 3 作 π 的，等等。許多內容均直接來自中算。日本學者及有關著作也認爲："…綜上所述，該書中引據《算法統宗》者居多。"[23]。"當時都學習中國的數學書《算法綜宗》，其影響極大。該書是明代程大位所著，1592 年刊行。…自此，方程盈朒、方陣等均傳入我國。"[24]。由上所述，《塵劫記》是一部內容屬於實用性質、比較淺顯、適合大衆化的教科書。從這三卷本的著作內容，大致可以了解當時日本和算涉及的範圍及其水平。

毛利重能另一弟子今村知商（生卒年不祥）於 1639 年著《竪亥錄》一卷。由其序文可知，內容的直綫圖形以前部分爲從師毛利重能學習而得，其後的圓弦術等爲自己獨立研究的結果。此書主要內容爲方弦術（勾股術）和圓弦術。圓弦術爲：設圓徑爲 d，弦爲 a，矢爲 h，弧爲 S，則有 $d=\frac{a^2}{4h}+h$；由此可導出求 a 和 h 的公式及 $S=\sqrt{4h(d+\frac{h}{2})}$，及求面積 A 的公式等。此書實爲關於平面和立體圖形的公式集。應其弟子之請求，僅印刷了一百册，以爲門生之用。以銅版活字印刷，非常精美。他還著有《因歸算歌》和《日月會合算法》。前者爲一般初學者而作，仿《算法統宗》的歌訣法，將算法統統編成長短歌訣。其中還有和算書中最早出現的鶴龜算問題："兔、野鷄共頭三十二，共脚九十四，問兔、野鷄各幾何。"其原型爲《孫子算經》中的"鷄兔同籠"問題。當時，和算所使用的計算工具也是從中國傳入的算木和算盤。算木在初期稱作算籌，隨年代不同其尺寸稍有變化，大致爲長四厘米，底面爲六、七毫米見方的長方體。也用紅、黑色來表示正和負。

毛利重能、吉田光由等人在中算的基礎上開創了和算，并爲和算的進一步發展奠定了基礎。至此，和算的興起也可以說是明代商業數學在日本社會實際中的應用。

明末清初西方數學傳入中國，如《崇禎曆書》、《數理精蘊》以及梅文鼎的《曆算全書》等著作爲代表。但雍乾嘉時代，西學輸入中止，籌算又興。這些內容均陸續傳入日本，并產生一定影響。

在日本被稱作算聖的關孝和及其弟子，使和算在中算基礎上向前邁出重要一步，將和算在獨立發展過程中推向高峰，并創造出世界水平的成果。關孝和生於 1640 年前後，卒於 1708 年，是毛利重能高徒高原吉種的弟子。他在和算的許多分支中都做出了杰出成就。一生著書數十種，《關孝和全集》中共收入二十六種著作。同時，他還培養出衆多人材，其門生達數百人之多，形成和算最大的關流學派。其中有許多人都是和算史上重要人物，如，建部賢弘、松永良弼、安島直圓、日下誠、和田寧、會田安明等以及近代日本首位杰出數學史家遠藤利貞、數學家、數學史家林鶴一均屬於關流。他們是和算的最高代表。下面簡要介紹一下他們在不同程度上受中算影響取得的成就。

關孝和在其主要著作之一的《括要算法》中對"招差術"和"垛積術"作了詳細說明。其"招差術"中的相減相乘法是唐《崇玄曆》中首先使用的。而定、平、立三差法在元郭守敬的《授時曆》中有應用，但没講方法。已傳入日本的清《天文大成管窺輯要》卷八中對三差法有詳細說明。關氏

"招差術"是受其影響而來的。又,建部賢弘在其《算學啓蒙諺解大成》(1690)中數次提到關孝和曾抄寫過《楊輝算法》。而關氏在與其弟子建部賢弘兩兄弟合著的《大成算經》卷六,剪管六中寫道:"剪管者以余求總之法,一名秦王暗點兵也,俗謂之計物。"另外,吉田光邦著《日本科學史》認爲:"僅次於《算法統宗》而給與和算很大影響的是元代朱世杰所著《算學啓蒙》(1299)。萬治元年(1658)由久田玄哲刊刻出版,"天元術"始傳入我國。"關孝和對許多中國算書内容都很熟悉。上述關氏"垛積術"中出現楊輝三角形。他的杰出成就之一的,相當於"霍納"法的高次方程解法是在《楊輝算法》基礎上得到的[25]。剪管術即一次同余式組問題解法。剪管一詞來自《楊輝算法》中的《讀古摘奇算法》上卷。剪管術應非關氏之創,而是將《楊輝算法》的情况推廣到x係數不等於1,模之間存在公約數,即兩兩不互素的一般情况。他在其著作《算法闕疑抄》和《算法勿憚改》中用天元術對一百個問題做出解答,首次將天元術引進和算。他還將《天文大成管窺輯要》中的球面三角學知識應用到天文學中,開創了日本的球面天文學。方陣、圓陣的作法也是由《楊輝算法》而來。他的著作直接采用了許多中算書中的名詞術語,及其内容如演段術、開方翻變、招差、垛積、立天元一、開方法中的實、方、廉、隅等等。

關氏高徒之一的建部賢弘(1664至1739)以其在莫比烏斯函數、歐拉函數、連分數展開式、無窮級數、圓理等等,許多方面的杰出工作而成爲關氏弟子中第一位著名和算家。他於1690年出版《算學啓蒙諺解大成》一書,對《算學啓蒙》作了詳細説明和注解。與其兄及師關孝和三人合著的二十卷本《大成算經》是關氏去世後,由建部校訂出版(1710)的。整個著作的編輯體例是參考仿照《算法統宗》、《算學啓蒙》和《楊輝算法》的。其後,他將梅氏《曆算全書》譯成日文。隨着梅氏《曆算全書》、《數理精蘊》等著作三角函數、對數等内容傳入日本。[26]。

此外,其他和算家著有許多算書,其中有不少是對中算的注解、改編、再發揮。下面是其中的一小部分。《新編算數記》(1683年奥田有益著)的前半部爲九章數學,後半部爲宣明曆算法。竹田定直1689年著《九數新書》三卷。以九章各名命名其各章,如方田、粟布、少廣、商功等。貝原益軒作序中稱:"劉向九章重差,劉佑九章雜算,又甄鸞九章算術,劉徽九章算術,楊撮九九算術,李淳風九章釋注,張峻九章推圖,宗泉之九經術疏,秦九韶數學九章皆所以發展此術者也……大德年中韓國有朱世杰者…始發明天元正負術……"。其中秦九韶的《數書九章》還没有傳入日本。朱世杰《算學啓蒙》應是朝鮮文版。西脅利忠1697年編《算法天元錄》三卷,對天元術作了詳細説明。主要内容爲九章算法的説明,開平方、開立方及高次方程,演段法等等。佐藤茂春1698年著《算法天元指南》九卷五册。是普及天元術的教科書,從籌的擺法、大小數到高次方程的解法都作了非常詳盡的説明。小村松庵1701年著《漢術和變》,將算籌解二次方程法改爲用算盤來做。《算法天元樵談集》二卷(1702年·中村政榮著),《算法指掌大成》四卷(1723年,石山正盈著)及其他著作均以天元術爲主要内容。到18世紀中後期及19世紀中葉仍有關於中算内容的算書問世。千野乾弘著《籌算指南》(1767),《籌算開平立方法》(1768)、藤田貞資(改正天元指南)三册(1792)、村井中漸翻刻《孫子》、《五曹》、《海島》、《五經》、《夏侯陽》等五種中算書。鵜峰戌申《籌式捷法》(1854)、小野廣胖《算盤獨稽古》(1857)、金子昌良《算盤道調》(1864)、吉瀨源兵衛《新版天元算法利傳記》(1864)、朱德孚《算盤近道》(1817)、《算盤調法記》(1819)、大藪茂利《算盤指南》(1842)、等等。

綜上所述,中國傳統數學在自6、7世紀以來的一千多年期間,對日本產生過深刻影響。日本在經歷了一千年的使用中算時期後,於17世紀初產生了和算。和算在逐漸發展、成熟的過程

中，始終受到中算不同程度的影響。直到明治維新初期，在和算中仍能看到中算的影子。在西方近代數學大規模傳入後，和算及中算的影響才告結束。

参 考 文 獻

〔1〕 金容雲、金容局：《韓國數學史》（日文），1978年，日本東京，第39頁。

〔2〕,〔3〕,〔6〕,〔10〕 同〔1〕，第46頁。

〔4〕,〔5〕 一松信等：《新數學事典》（日文），1986年，日本大阪，第885頁。

〔7〕,〔8〕 湯淺光朝：《日本科學技術一百年史》（日文），上册，1988年，日本東京，第16頁。

〔9〕 李儼：《中算史論叢》第五集，1955年，北京，科學出版社，第39頁。

〔11〕 同〔1〕，第47頁。

〔12〕,〔13〕 日本學士院：《明治前日本數學史》（日文），第一卷，1954年，日本東京，第3頁。

〔14〕 同〔1〕，第60頁。

〔15〕 同〔1〕，第83頁。

〔16〕,〔17〕 同〔12〕，第148頁。

〔18〕 同〔12〕，第6頁。

〔19〕 同〔12〕，第9頁。

〔20〕 同〔12〕，第27—第29頁。

〔21〕 本田益夫：《金昆羅社算額與和算史概説》（日文）、1983年，日本香川縣，第55頁。

〔22〕 同〔12〕，第40頁。

〔23〕 同〔12〕，第47頁。

〔24〕 吉田光邦：《日本科學史》（日文），1987年，日本東京，第228頁。

〔25〕 同〔4〕，第891頁。

〔26〕 同〔24〕，第262頁。

《算法統宗》及其對日本數學教育的起步點的意義

[日本] 仲田紀夫

1. 前言

1980 年 3 月 31 日，在本教育系① 召開的日中數學教育研究會上，北京師範大學的鍾善基教授做了講演。當時，在散發的論文中包括慕名已久的關於《算法統宗》的部分，在講演後的交談中提到希望能得到這部書，由於是初次見面，所以只向他說了上面的話。

1981 年夏天作爲日本數學教育學會主辦的日本友好訪華團的一員訪問北京師範大學時，再次同鍾善基教授會見之際，他介紹了同校的數學史家白尚恕教授。白先生贈給了我夢寐以求的《增删算法統宗》。

如所周知，從私塾算術教育和日本數學的誕生與發展過程可看出標志我國高水平的算術、數學教育的源流是《塵劫記》。而這部《塵劫記》的誕生，正是按照中國數學史上光輝的《算法統宗》作成的。

在此種意義上，追溯我國的算術、數學教育的淵源時，《算法統宗》有着啓蒙意義。它又是對數學教育史、思想史頗感興趣的我務必想得到的書籍。

里得幾何學，公元前三世紀）性質相仿。就這一意義而言，則與《幾何原本》同樣對後世具有很大影響。

《算法統宗》和許多名著同樣，是仿照這部《九章算術》的，我國①的和算②也在很大程度上得之於此。

《九章算術》以後出現了很多名著，但關於這些在後面將有論述，這裡僅就與《九章算術》有關部分稍加叙述。

進入十三世紀，南宋的首都杭州數學研究也很活躍，秦九韶的《數書九章》(1247)、楊輝的《楊輝算法》(1274)，同時代華北的朱世杰之《算學啓蒙》(1299)、《四元玉鑒》(1303)，稍後杭州的吳敬的《九章算法比類大全》(1450)等名著出現形成了數學史上的黃金時代。順便說幾句題外話，這些名著陸續傳入我國并成爲和算發展的基礎。

楊輝和吳敬都是《九章算術》的研究家，尤其是吳敬的《九章算法比類大全》對《九章算術》的內容做了進一步的發展，此後，并使《算法統宗》得以誕生。

此處由考察《算法統宗》的內容可知，章的劃分基本與《九章算術》相同，可是數學水平和解法技術方面已有很大進步。這是由於博採繼《九章算術》以後的衆多數學家之長取得的成果。主要有以下幾點：

(1)關於大數、小數和圖形的名稱等的增加和充實。

(2)加進了算盤的計算法內容，特別在乘除內容裡把古代乘除術加以改進，引入了稱作"歸除"的計算法。這就是我國熟知的通稱爲九九的"二一添作五"、"三一三十一"的計算法。

(3)後世，所謂"鋪地錦"就是由新法筆算進行的乘法運算。

(4)收入了縱橫圖。這是與數的神秘思想相結合的古代數學游戲。如所周知，它最初出現於《九章算術》系統。

這些特點，對於我國的算術教育給予什麼影響將在以後論述。

3. 江戶時代以前的日本數學教育

要說我國最初的學校教育，那就是 701 年根據大寶律令而設置的大學和國學③了。

在這樣的學校教育中，要學習被稱作四道的紀傳、明經、明法和算經，在"算經"里採用下面的數學書：

周髀算經、九章算術、海島算經、五曹算經、孫子算經、綴術、六章經、三開重差、九司。

這是和唐制的《算經十書》有所不同的，這裡留下爲什麼沒有採用《算經十書》的疑問。我想大概是由於當時的學問沒有完全照搬唐制，而仿照受唐的影響的新羅④方式的緣故吧。雖然上記那些圖書都是中國的數學書，但奈良、平安時代只是學習這些傳進來的數學而已，從那時起一點也沒超出那個範圍。

據說當時平民的計算水平是很低的，在進行必要的計算時則花錢請設在街頭的算所中的

① "我國"指日本，下同——譯者注。
② "和算"是指日本十七世紀時形成的具有一定特點的數學。——譯者注。
③ 日本古代地方官吏的子弟學校——譯者注。
④ 新羅，朝鮮古代的一部分，相當於中國東晉到隋唐時代。——譯者注。

數學家來解決。特別是到了後來的戰國時代①,國民的數學水平低劣到會計算除法的人即爲數學家的程度。

從奈良時代到江户時代的900年間,也不過僅在源爲憲的《口游》(970)、藤原通憲的《繼子算法》(1157)、洞院公賢的《拾芥抄》(13世紀)等著作中,包含一些粗淺的算術和數學游戲之類的內容。可以說當時我國連一本獨創性的數學書也沒有,是一個數學極爲落後的國家。

作爲迎來我國數學繁盛開端的人是毛利重能。

有關他的詳細情况是不清楚的,據說曾奉豐臣秀吉之命留學明朝,歸來時把《算法統宗》和算盤帶了回來。因爲他回國時秀吉已經去世,所以他到了京都,挂出"天下第一除法指高"的招牌開設了算盤道場②。

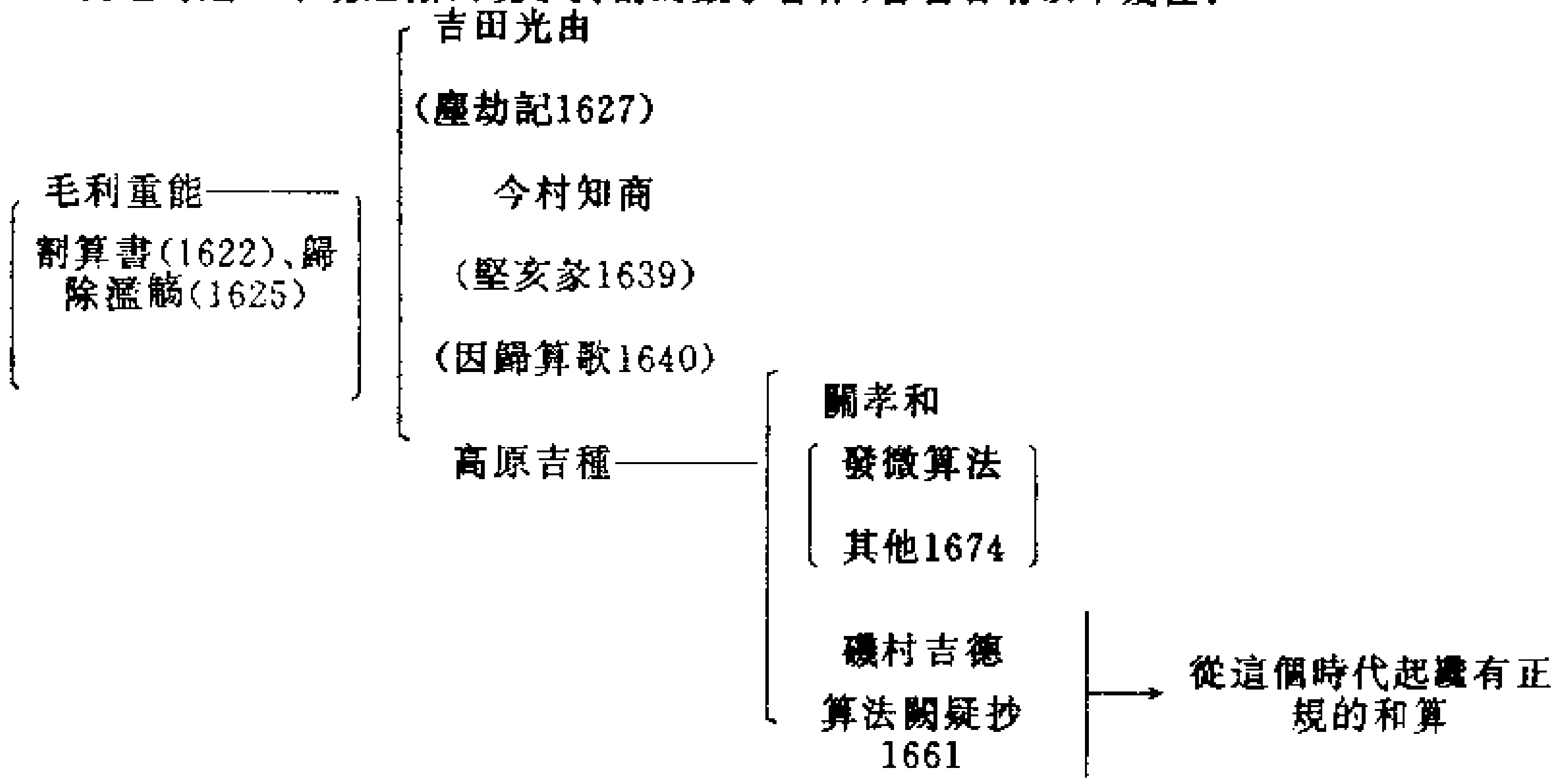
當時正值德川時代,商業活動逐漸興盛起來,武士、商人們都必須具備一定的計算能力。向來計算法是用算木③的複雜的方法,而在毛利的算盤道場中,則使用"算盤"這種新計算工具,教授簡便而有效率的計算法,因此在當時社會上立即大受歡迎,有學生數百人到這個道場來學習。

毛利重能模仿《算法統宗》的開頭部分有關算盤的方法,寫出了日本最早的數學書。

這部書的正式書名不太清楚,通稱作《割算書》(1622),另外還有《歸除濫觴》(1625),但都是介紹程大位發明的九九算法之應用的所謂"歸除"的計算法的書。

雖然他的數學學力不太高,可是擅長教學方法,因而培養了不少優秀的學生。其代表以今村知商、高原吉種、吉田光由三人爲最。

從這時起日本纔逐漸出現了獨創的數學著作,著名者有以下幾種:



關孝和被稱爲"和算中興之祖"那是由於從他的時代起培育了真正的高度的數學"和算",他們的數學門徒輩出爲以後奠定了和算興盛期的基礎。

另一方面,平民的算術教育是由吉田光由承擔的。那就是他的名著《塵劫記》,對於這部書將相加叙述。

① 是日本的一個歷史時代,相當於中國金元時代。——譯者注
② "道場"原意是佛教徒修行的地方,這裡借用來指教授算盤的地方。——譯者注
③ "算木"是長方形木片,日本的一種計算工具。——譯者注

4.《算法統宗》和《塵劫記》的誕生

在《塵劫記》中有些以前的數學書中所沒有的特點，其主要者爲：

(1)打破只用漢字書寫書的常規，開始使用夾雜平假名書寫，便於閱讀。

(2)由於題材、題名、内容等均來源於日常生活，所以很容易理解，而且大多對平民的職業工作有直接深刻的現實意義。

(3)解說圖和板畫風格的插畫很多，容易直觀的理解，感到親切。

(4)繪畫用彩印刷，具有强烈的立體感，并漾溢着愉快氣氛。

(5)吸收了數學游戲就引起學習興趣。(初版本中没有)

由於這些特點，使得這部著作具有劃時代的意義。具有通俗的平民内容，顯示了近世教科書的特色。

這個時代的木版印刷至多也不過印五六百部就到頭了，三四種顏色的彩色印刷因其費用昂貴是可以想象得到的事。

這麼大的印刷費從哪里支出是個疑問，爲此，有必要探討一下吉田光由的世系。

下頁的圖就是吉田家族的世系圖，由此即知，這部著作的問世和内容的廣泛而豐富之原因了。

吉田家的字號叫做角倉，有以角倉了以爲代表的15世紀以來繼續不斷的大實業家的繁榮家譜，在其一族中出現過著名醫生和學者。

了以的兒子與一(素庵)數學優秀，學習過據說是由外貿船從明朝帶來的《算法統宗》，并將其講授給吉田光由。

光由在把這部書融匯貫通的基礎上，經過他的獨創性工作，編著了日本的算術書《塵劫記》。

關於他的著作的來由，於1634年的再版本中有如下的叙述：

"我少有從師，而受教於汝思(程大位)之書，并以此爲指南，且略有所心得。"

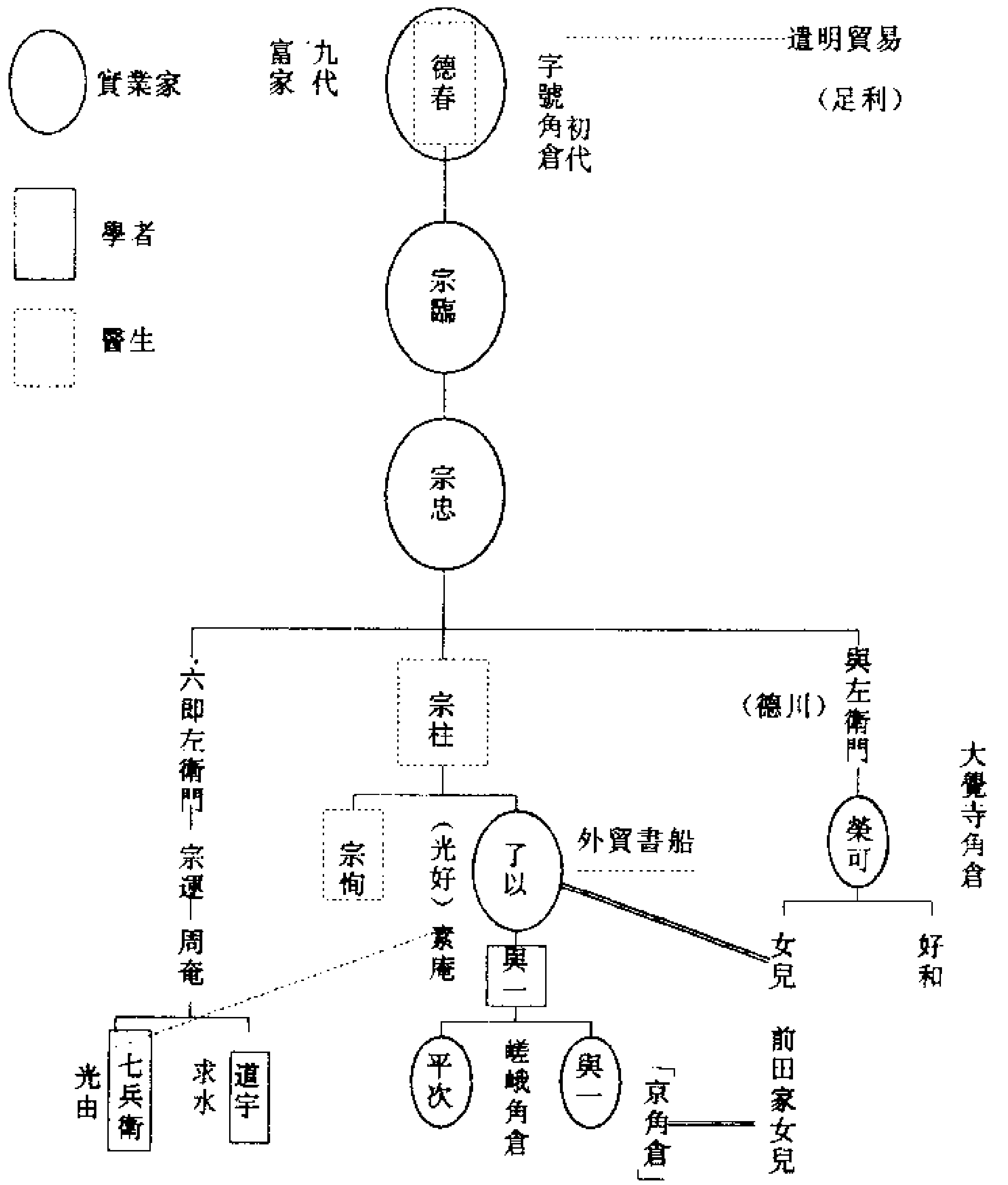
將先生之教誨，整理、編寫爲十八卷本，并將一、二、三改爲上、中、下三册，以爲初學者啓蒙之用。

上面所說"汝思之書"就是《算法統宗》，并明確講出是以《算法統宗》爲藍本而著作的，同時講述了作爲數學入門書而寫作的目的。

《塵劫記》一方面成爲學舍的算術教科書，另一方面又爲"和算"打下了基礎，而作爲入門書，在二百余年間得到廣泛流傳。受到高度評價，究其根源，是因爲日常計算的實用效果，可以做爲各行各業的廣泛教材。又由於他在年青時代爲角倉家的一員，從事於商業活動，貿易業，土木工程等積累了豐富的生活體驗所致。罕見的手抄本，優秀的數學才能，獨特的想法，豐富的生活體驗，然後還有巨大財富，可以説，由於這些條件的綜合，才使《塵劫記》得以問世。

如前所述，雖然光由是以《算法統宗》爲規範的，但在形式和方法方面幾乎没有受其拘束，如下所示，最初的度量衡、數的計算、算盤的操作等部分相同，章節和條目的編排方面有所不同，"方田""少廣"等中的理論部分和分數，除圓的内容外，重視實用。另外，對"均輸"、"盈不足"、"方程"等中稍難一些的内容幾乎没有涉及。

吉田家族的世系圖



在下頁以後的對比中，都是從數學的內容方面考慮的。從其他角度，例如，從類似的問題集的形式，問題的題材等方面的比較，恐怕也能發現有趣的課題。因爲對於兩書還未充分理解，所以僅是不成熟的想法，也可能有錯誤，只好在以後的研究中予以改正。

塵劫記 目錄(寬永八年版[①])

第一	大數名之問題	卷一 ○度量權衡 整數自單以上十百千萬億兆京… 零數自單以下寸分厘毛毫絲忽… ○九九生數俗名小九九 ○珠盤式(上法歌退法歌) ○因乘總論、歸除總論(鋪地錦)
第二	一以下的小數名問題	
第三	一石以下的小數名問題	
第四	田畝名數問題	
第五	諸物輕重問題	
第六	九九問題	
第七	八算[②] 除法算圖附乘算法	
第八	見一除算圖附乘算法	
第九	倍折算法問題	
第十	穀物買賣問題	卷三 粟布章 穀物之買賣
第十一	傳草袋問題	卷四 衰分章(比例、級數)
第十二	杉算問題	
第十三	倉庫收藏包裝問題	
第十四	用錢買物問題	卷三 粟布章(金錢兩替、穀物買賣)
第十五	銀兩比率問題	
第十六	金兩比率問題	
第十七	小判[③]兩比率問題	
第十八	利息問題	
第十九	絹絲棉的買賣問題	
第二十	套匣算之問題	卷四 衰分章(級數)
第二十一	長岐之買物、三人合伙買物的分配之問題	卷四 衰分章(比例比例配分、級數)
第二十二	船貨運費之問題	
第二十三	量地之問題	卷二 方田章(田畝形狀的名稱、面積)
第二十四	領地租稅問題	
第二十五	斛斗法附古代升法	卷七 商功章(立體的容積)
第二十六	對諸事以斗估量的問題	
第二十七	木材買賣問題	卷九 句股章(三平方定理)
第二十八	用樹皮修屋頂問題	
第二十九	屋頂覆蓋板面問題附斜度的多餘部分	
第三十	在屏風上貼箔的面積問題	卷二 方田章(面積)
第三十一	河流工程分配問題	卷七 商功章(關於築牆、築堤的立體的求積)
第三十二	溝壑挖掘工程分配問題	
第三十三	市區橋孔的分配問題	卷四 衰分章(比例配分)

① 公元 1630 年——譯者注。
② 珠算中 2 至 9 爲除數之割造算——校者注。
③ "小判"是日本古時的金幣。——譯者注

第三十四	估計樹木長度問題	卷九 句股章(三平方定理、測量)
第三十五	市街面積問題	
第三十六	老鼠算問題	數學游戲(心算)
第三十七	逐日倍增問題	
第三十八	日本國内的男女人數問題	
第三十九	烏鴉算問題	
第四十	金銀千枚開立方積問題	卷六 少廣章(開立方計算)
第四十一	絹一反或布一反[①]絲的長度的問題	數學游戲(竅門計算)
第四十二	分油問題	
第四十三	百五減問題	
第四十四	所謂藥師算問題	
第四十五	四人六里乘馬三匹問題	
第四十六	開平方問題	卷五、六 少廣章(開平方、立方計算)
第四十七	開平圓法問題	
第四十八	開立方問題	

(内容分類)		其他方面	
第一~九卷	數和乘除基本計算	卷七	均輸章、盈朒章
第十~三十五卷	日常生活和職業上的數學	卷八	方程章
		卷十	難題:方田、粟米、衰分
第三十六~四十五卷	有關數學游戲之類的内容(四十除外)	卷十一	難題:少廣、商功、均輸、盈朒、方程、句股
第四十六~四十八卷	稍微高級的數學		

(注)上面主要是從數學内容方面進行對應的。若以問題的形式之類型對應的話,要有些變動。

5.《塵劫記》和學舍教育

問題的類型很多,我參考了當時能找到的數學書中的許多問題。

我國二百余年間的學舍算術教育,對明治初期由於新的西方近代數學的傳人而促成算術教育變革期的形成,究竟起了多大作用呢?

關於這一點我想以下文來做些說明。

"我受聘爲聯合國專門爲西非培養義務教師的教育大學,任數學教師。在西非喀麥隆教育大學培養黑人的優秀分子。一些新獨立的國家和發展中國家,儘管在文化、教育方面與日本有着本質上的區别,但仍以日本爲學習的榜樣。"

這些國家的想法是:日本在明治以前也和我們現在相比同樣非常落後。可是日本向歐美學習了一百年後,就成了今天這樣的工業國。因此我們必須向日本學習(以日本爲師)云云。這種

① "一反"是布匹的度量單位,長10.6米、寬34厘米。—譯者注

心情可以理解，但我認爲情況有所不同。因爲在日本有德川時代私塾教育的底子，普及義務教育也比較早。

以上是，在喀麥隆教過6年數學的日本醫科大學的花崗松枝先生，於日本數學教育學會誌上發表的報告中說的。

學舍教育爲“明治初期國家教育的基礎”之論點可由明治初年的學舍數約7000校，僅從校數來考慮對促進近代化的作用也可以說是相當大的。這一事實得到證明。

考察江户時代的算術教育時，從教育機構和算術内容兩方面來看是必要的。

作爲教育機構的有藩學校①(藩校，藩輿)、鄉學、私塾、學舍、家庭教師，另外還有掌櫃教伙計打算盤的商家教育等，算術的内容分爲①算盤技術爲主，②以《塵劫記》爲主的初等算術，③高級算術、數學(和算)等三個階段。

現在參考以前，將關於藩學校和學舍，教授算術、數學等的程度的普及率按時代區分整理成表。

從表上，可清楚看出藩學校是依次增加了數學的指導，初期的時候有和古希臘同樣把“計算視爲下流的東西”的所謂潮流。

表1 藩學校和教育内容

教育内容 / 時代區分	漢字	習字	皇學	書學	數學算術算法	調查校數
寶曆——安永 (1751——1780)	13	4	2	2	0	13
天明——享和 (1781——1803)	45	24	9	4	13	45
文化——天保 (1804——1843)	82	48	21	16	20	82
弘化——慶應 (1844——1867)	74	41	31	20	35	74
明治初年 (1868——1871)	47	26	21	2	20	47
合計	272	147	84	44	88	272

“下級的武士，在課程中把算術列爲必修科目，當時的武士之風普遍輕視有關數計算的活動，對於平民則把算術列爲選修課。可是也有些藩鎮，把算術作爲六藝之一實行獎勵。”

這是日本教育史家唐澤富太郎所說的。

但是，由於社會秩序長期穩定，隨着實務型武士的要求，武士階級中學習和算這門學科的人與日俱增了。

他們被認爲是特殊技術的所有者，可以被任用爲幕府和諸藩鎮管帳的、管天文的和管治水工程的官員，以及算學師範等職位，從而有利於晉升和就職。

① “藩學校”是日本古代地方上的藩鎮所成立的學校。——譯者注

另一方面，在學舍的算術教育是如何呢？

教科書研究家的仲新氏有如下的叙述：

"考查有關學舍的教育内容，象已經說過的那樣，學舍是實用的平民的初級教育機構，其教授科目主要是閱讀、寫字、算盤而已。但是，讀、寫、算三個教科形式與其說是普遍在後期成立，倒不如說在初期只有讀、寫二科。還有那種一般稱作"手習"① 的也作爲一個教授科目，而算盤通常是在家庭或私塾中學習，并在商業活動中進行實際練習。但是，後來學舍也把這種課程逐漸增加了，近世末期的學舍是成爲具備教授讀、寫、算三個教科，并進一步增加其他科目的初等教育機構，同時逐漸達到了完備的形態。因而學舍很快就發展成近代的小學校。

在平民生活中，算盤的使用不僅是不可缺少的，而且成爲各種職業中所需的初步算術知識的必備能力，所以藩學校和學舍也都逐年增加算術、數學的教授，如表所示，對江户末期調查的藩校和學舍數的一半以上都教授算術和數學。

對此唐澤氏說：

"如上所述學舍是隨市民階級從享保②年間的劇增而增加的，尤其是到文化③、文政④、天保⑤ 年間學舍數激增，特别是吉宗將軍從文化教育方面對學舍施行大力扶持，和不干涉政策，……如上所述學舍逐步從私人設施成爲具有公家的市民訓練的性質，這種形式很快就成爲近代學校教育得以發達的有力基礎。這一點在教育上有着非常重要的意義。"

相對於學舍所具有的國家教育的性質，在"算盤＋基礎知識"的算術教育中，基礎知識的比重大起來。

表 2　學舍和教育内容

分類 / 教育内容 / 時代區分	第一類	第二類	第三類	第四類	第五類	調查校數
	讀書習字	讀書習字算術 茶花書其他	讀書習字算術	和學⑥漢字算術	讀寫習字算術醫學 佛學裁縫其他	
寶曆——安永 (1751——1780)	6	1	0	1	0	8
天明——享和 (1781——1803)	18	10	3	1	0	32
文化——天保 (1804——1843)	303	127	12	20	24	486
弘化——慶應 (1844——1867)	2,148	925	43	99	80	3,295
明治初年 (1868——1871)	4,573	2,035	68	145	89	6,910

① 手習 就是練習——譯者注。
② 享保是日本中御門皇的年號，爲公元 1716—1735。—譯者注
③ 文化：公元 1804—1817 年。—譯者注。
④ 文政：公元 1818—1829 年。—譯者注。
⑤ 天保：公元 1830—1843 年。—譯者注。
⑥ "和學"就是日本的國學。——譯者注

合計	7,048	3,098	126	266	193	10,731

（這是實際調查數，加進延享①以前教科不明的就有 15.530 校）

6、從和算到洋算的轉變

到江户時代末期社會發生大變動，從軍事、國防、航海術和其他方面逐漸產生了學習洋算（又稱西算）的必要。洋算的介紹者是海陸軍的關係者與和算家。

把科學的基礎建立在理論演繹上的洋算，和解決技術爲中心的直觀的歸納的和算相對照就發現它們在本質上是不同的，但因同爲數學所以存在着潛在的共同點，這就是和算家能夠轉變爲洋算家的原因所在。

由中國數學而來的和算，卻超過了中國數學，而且對很好地吸收消化了新輸入的洋算的日本人的數學才能不能不表示敬意。

在 1857 年（安政四年）我國最初的洋算書，在江户和大陸同時出版了。

江户的著作是柳河春三的《洋算用法》，他不是數學家而是洋學家中的奇才，用荷蘭系統的計算數字和算式，寫就的著作是地道的洋算書。

另一方面，大陸的著作是福田理軒的《西算速知》，他是有名的和算家，是順天堂數學塾的創始人。在他的書中沒有計算數字和計算記號，計算的筆算法也不是西洋算法，而是和《算法統宗》中的"寫算鋪地錦"類似的，可以說是半洋算書。

《算法統宗》，在日本數學史中從《塵劫記》到《西算速知》的足足 230 年間，用多種形式造成很大影響，同時對日本的算術、數學教育的發展做出了貢獻。

直到 19 世紀末，才迎來了我國的新時代，從學舍教育轉變到國家教育，在算術、數學教育方面也完成了從和算到洋算的轉變。

於是發生了某種程度的混亂，但那是沒辦法的事情。

1872 年（明治五年）頒布了學制，小學章程中提出"廢止珠算，講授筆算和心算"。可是第二年對章程進行了改正，"章程中，算術不僅是洋法算術，和算也包括在內，應在數學書中予以講授"。即修改爲"算術是筆算和珠算并用"了。

這是由於不僅小學教員太少，而且教員中多數不懂洋算，雖然頒布了教育部命令，但不切合實際情況的緣故。小學校教育真正採用洋算是 1887（明治二十年），大約延遲了 15 年！

如果從不同文化全面進行轉換這一角度來考慮的話，也可以說 15 年是很短的時間。這個成果不外乎是多數的學舍教師與和算家，以和算爲基礎培養了對於數學有敏鋭的直觀力以及具備了卓越的歸納力進而吸收了洋算而取得的成果。

把和算和洋算比較一下，數字、記數法、計算符號、文字 a、b 等等的表現和式子等等，特別是數學的體系、系統性和實用方面等等，多數之點都是不同的，而解文字題（通稱應用問題）和它的應用的廣泛性卻沒有什麼不同。

東方系統的算術、數學在從《九章算術》、《算法統宗》、《塵劫記》的 1700 年間所形成的長

① 延享：公元 1744—1747 年。——譯者注

流,中心內容是四則計算和諸等數應用問題、四則應用問題。

後者在明治以來的算術(算數)教育中,應用問題、事實問題、書寫問題、文字題等等的名稱有了變化,而最古老的重要內容還繼續存在。

從大正①到昭和初年,這種應用問題是執形式陶冶說的旗手,被認爲是"鍛練頭腦"的好材料,因而都陷進難題主義,濫用作入學考試的選題。

不久,作爲難題考試對策,嘗試考題的類型化。於是,鶴龜算、職務算、旅行算、流水算、植樹算等30多種某某算形式得以產生。而這些問題的原型源於《算法統宗》,另外,某某種的名稱是受《塵劫記》中的"杉算"、"宝匣算"、"老鼠算"、"烏鴉算"、"藥師算"等的啓發而來的。

在今天的算術、數學教育的應用題中已不存在"某某算"的名稱了,但若取現行教科書中的應用題來考察的話,可以某某算來分類。

縱觀古今、東西,在數學教育分支的算術和初等數學方面,應用題向來被作爲一大支柱而受到充分重視,并顯然會繼續下去。而且今後,應用題在初等和中等教育中的重要性也不會改變。

7、結束語

1977年5月,"《塵劫記》出版三百五十週年紀念表彰事業"的執行委員會把寬永八年版的《塵劫記》的復刊本發行,有辛得到這本書。

以前就是對日本數學教育史中的以下幾個問題很感興趣,所以,在研究復刻本原版《塵劫記》之後,對這幾個問題就加深了研究興趣。

(1)我國算術、數學用語基本上是中國傳來的。分別探求各個語源,術語發展的正確方向。

(2)在江户時代,平民主要用算盤來學習算術,數學專家(主要是武士)則學習和算。前者用於日常必須的各種算法,而後者是所謂"無用之用","游戲"之類。這些內容之中包括與明治初期的洋算相關聯和類似的內容。

(3)由《算經十書》爲代表的中國數學的內容以及它們對日本數學的影響。

這類研究的主要綫索之一是《塵劫記》,對這部著作進行探討就必須深入理解《算法統宗》。

被稱爲我國首屈一指的數學史家三上義夫氏有如下的叙述:

"日本數學勃興之時,有些中國算書傳入日本。而產生主要影響的僅是《算學啓蒙》和《算法統宗》二書……吉田光由的《塵劫記》被認爲是基於《算法統宗》而來的著作。提到《塵劫記》幾乎可以說是算術書的別名,流傳極廣泛。如果說這部書得益於《算法統宗》匪淺的話,那麼也就是說中國算法在日本爲衆多人所學習。"

據說因爲起先選入的《綴術》很難讀懂,所以換成了《緝古算經》。

《算經十書》與其他算書自奈良時代以後,由遣唐使經由朝鮮帶回日本。江户時代初期,這十部書再次傳入日本。

如此,在爲數衆多的中國數學書中,《九章算術》占有特殊地位,在杭州的黄金時代,也廣爲人們所研究。

① 大正:1912年—1925年。—校者注

在做參考以前，先簡單介紹一下各書內容。

《九章算術》是由9章組成的數學百科辭典。

《數術記遺》是關於計算方法的著作。

《海島算經》是測量遠處海島距離的方法。

《五曹算經》是5位地方政府官員(曹)以工作中所及數學問題爲內容所寫著作。等等。

這些書均各具特色。因爲《九章算術》是涉及數學整體百科辭典的著作，所以對後世產生了深遠的影響。

綜上所述，這次有幸蒙白教授贈給了《增刪算法統宗》使我的研究能夠多有所進步。作爲對鍾、白兩教授的感謝就是整理成這篇小論，說不上是數學史研究，因我對數學教育史、思想史、文化史的研究都感興趣、通過這篇小論不過是作爲研究的起步罷了。

(原文的注與參考文獻以及最末的表從略)

(李迪譯自《埼玉大學記要・教育學部(教育科學)》第30卷(1981)55－66頁。那日蘇校)

作者仲田紀夫原系埼玉大學教授、現爲數學旅行作家，近年經常到世界上一些與數學有直接關係的地方進行考察，發表了一系列數學旅行報告。——譯者追記。

中、西方數學中的極限理論之評析

劉　逸
（徐州師範學院數學系）

極限理論爲數學中的重要内容之一，也是數學基礎的重要組成部分。但極限概念的誕生與極限理論的形成中國與西方各有不同的哲學思想背景與各自的研究理路。本文將就中、西方各自不同的學術淵源來研究和評析二者在數量觀方面的差異，在此影響下所誕生的極限概念，從而發展爲極限理論所形成的過程。

一、中國古代極限概念與極限理論

極限概念在我國古代最先肇源於春秋戰國時代。這一時期的學術思想是百家爭鳴，導致學術上高度繁榮。諸家學者在哲學與自然科學方面從刻劃現實世界的無限性中萌發了研究無限數學的一些基本觀念。因而，就很自然的引發了對極限概念的研究。

戰國時期，《莊子·天下篇》中記述了著名的命題："一尺之棰，日取其半，萬世不竭。""棰"，即杖或棍，意即長爲一尺的連續不斷的綫段。由此給出了中算史上第一個無窮小數列：

$$1/2,\quad 1/4,\quad 1/8,\cdots,1/2^n,\cdots\cdots。$$

《墨子》書中有"經上"、"經下"、"經說上"、"經說下"四篇，通稱《墨經》。在該書中對於極限概念作如下之闡述。

《經上》："體，分於兼也。"《經說上》："體，若二分之一，尺之端也。"

這裏"體"，是指個體，即部分之意。而"兼"，爲衆體之併，即指全部。"尺"，相當於幾何中的"綫段"，而"端"，相當於"點"。"二"是兩個"一"之併，而"綫段"，即爲"點"的集合。這樣，就明確的表述了"兼"與"體"的相互關係。對於點在綫段中的連續性，有下面的精辟論述：

《經下》："非半弗斱則不動，說在端。"《經說下》"非：斱半，進前取也。前則中爲半，猶端也。前後取，則端中也。斱必半，毋與非半，不可也。"

爲說明上文之意，先引出《墨經》中關於"端"的特定意義：

《經上》："端，體之無厚而最前者也。"《經說上》："端，無間也。""'斱'，即'斵'之變體。斵、斫同詁。按'斱'有剖析的意思：'斱半'意謂剖取其半而去之。"[1]

雖然"斱半"有"剖取其半而去之"的意思，但由於"端"是"體之無厚而最前者"，無廣狹厚薄大小之分，也就不可能斱去其半而去之了。因而，"非半不斱"。而"端"又不可能有半，無從去其半而斱了，之，則"端"是永遠不能被斱去的。這就是《經下》中所說："非半弗斱則不動。"

應特別值得注意的是，在《經說》中關於從綫段的分割中獲得"端"的兩種方式：

1."進前取"：設一綫段 AB，從 A→B，至全長一半 C_1 處斱去之，餘 $C_1B=(1/2)AB$；再如前

法取 C_1B 之半 C_1C_2 新而去之，餘 $C_2B=(1/4)AB$。依此法繼續前進斵取至無窮多次，則最後必達"中無爲半"而不可再分的一個"端"，即 B 點（如圖 1）。

2."前後取"：由綫段兩端同時向綫段的中央斵取，如由 A 向中央取 AA_1 段，同時由 B 向中央取 BB_1 段，均斵去之；因 AA_1 與 BB_1 均爲全長的 1/4，故餘下之 A_1B_1 爲全長的 1/2。再由 A_1B_1 同時取 A_1A_2、B_1B_2 復均斵去之，則餘下之 A_2B_2 爲全長的 1/4。重復上述取法，不斷向綫段中央斵取至無窮多次，則最後必達到綫段中央的一點 O，此即是"端"，不能再斵其半而去之了（如圖 2）。"容易看出，墨家的'進前取'和'前後取'，這和十九世紀後半期解決實數連續性問題的數學大師康托爾(Georg Cantor，1845－1918)的'區間套原理'有驚人的相似。"[2]

應該説明的是，《莊子·天下篇》中的"日取其半，萬世不竭"，其意在於"不竭"；而《墨經》中的"端"由於"體之無厚而最前者也"，即最後必能達到不可再斵的地步，也就是"端"。這個"端"，意爲物質不可再分的原始質點。因之，我們認爲名、墨兩家雖對無理分割的看法不同，但對於連續性均已有相當深刻的認識。連續性結構與極限概念的建立，爲建立極限理論奠定了堅實的數學基礎。

我國極限理論的傑出奠基者是學者劉徽。劉徽繼承先秦哲學家的無限數學思想，在《九章算術注》中寫下了關於極限理論的光輝篇章。他所研注證明的圓面積公式與陽馬體積公式的極限理論爲數學理論極爲重要的組成部分。

《九章算術》（簡稱《九章》）"方田"章中的"圓田術注"，是劉徽《九章注》中文字最長的一段，共 1803 字。該注用極限思想對圓田術進行了論證；並推導了較爲精確的圓周率。其推導過程爲我國數學史之首創的嚴密的極限方法。現將圓田術與劉徽注有關論證述之如下："術曰：半周半徑相乘得積步。"圓田術給出圓面積公式 $S=(C/2)\times R$。其中 S 爲圓面積，C 表圓周長，R 爲圓之半徑。問題是古率以 $\pi=3$，徽以爲疏，故作注。徽注曰："按半周爲從，半經爲廣，故廣從相乘爲積步也。假令圓徑二尺，圓中容六觚之一面，與圓徑之半，其數均等。合徑率一而外周率三也。"

"又按爲圖，以六觚之一面乘半徑，因而三之，得十二觚之冪。若又割之，次以十二觚之一面乘半徑，因而六之，則得二十四觚之冪。割之彌細，所失彌少。割之又割，以至於不可割，則與圓合體，而無所失矣。觚面之外，猶有餘徑。以面乘餘徑，則冪出弧表。若夫觚之細者，與圓合體，則表無餘徑。表無餘徑，則冪不外出矣。以一面乘半徑，觚而裁之，每輒自倍。故以半周乘半徑而爲圓冪。此以周徑，謂至然之數，非周三徑一之率也。周三者從其六觚之環耳。以推圓規多少之較，乃弓之與弦也。然世傳此法，莫肯精核。學者踵古，習其謬失，不有明據，辨之斯難。凡物類形象，不圓則方，方圓之率，誠著於近，則雖遠可知也。由此言之，其用博矣。謹按圖驗，更造密率。恐空設法，數昧而難譬，故置諸檢括，謹詳其記注焉。"[3]

這是一段理論嚴密的數學論證。但目前所見的數學史論著中解釋圓田術時多以解析式或竟採用現代極限形式，筆者認爲，這是很不妥的。事實上，圓田術即現今所稱之"割圓術"的論證方法基本上是採用"又按爲圖"、"謹按圖驗"的以圖驗術的幾何方法。且劉徽在注《九章》序中已明確表示："析理以辭，解體用圖"。這就更加説明劉徽在研究割圓術時定是以文按圖驗證之的。但劉徽原圖早已遺失，因而，要準確的解釋割圓術，關鍵在於能依劉徽注文恢復原圖。

依術文所述，割圓圖應有三幅：即割圓爲六觚圖、割圓爲十二觚圖、割圓爲二十四觚圖。

恢復原圖之説，原是百家爭鳴，數學史家在這方面付出了大量的精力與心血。筆者非常贊

同李繼閔先生所設之原圖。

如圖3①。徽注云："假令圓徑二尺，圓中容六觚之一面，與圓徑之半，其數均等。合徑率一而外周率三也。"也就是割圓爲六觚，因圓内接六邊形，其邊長 a_6 與半徑 R 相等。故外周 $C_6 = 6R$，周徑之比爲 $C_6 : 2R = 3:1$，這也就是古率所說："周三徑一"，實際上是六觚外周與直徑之比。

"又按爲圖，以六觚之一面乘半徑，因而三之，得十二觚之冪"。見圖4②是"割圓爲十二觚之冪"的圖。由圖顯見：十二觚的冪：$S_{12} = (C_6/2) \times R = 3 \times (a_6 \times R)$。

"若又割之，次以十二觚之一面乘半徑，因而六之，則得二十四觚之冪。"圖5③爲"割圓爲二十四觚之冪"的圖。從圖中可以看出：$S_{24} = (C_{12}/2) \times R = 6 \times (a_{12} \times R)$

從上三圖可以看出繼續分割下去的變化趨勢。故劉徽按此推理便得到了圓内接正多邊形面積變化的結果："割之彌細，所失彌少。割之又割，以至於不可割，則與圓合體，而無所失矣"。

雖然按極限觀點看，圓内接正多邊形之面積隨着邊數的不斷增加使其與圓合體，但從直觀上看，割圓拼方總是會失去一些小弓形面積。對此，劉徽又作了精細的分析："觚面之外，猶有餘徑，以一面乘餘徑，則冪出弧表"。餘徑，即圓半徑與圓内接正多邊形邊心距之差。如圖6④。設所失 $\delta_{3\times 2^n} = S_{圓} - S_{3\times 2^n}$（即上述諸圖中帶陰影的小弓形之和）。在此劉徽指出了餘徑 $d_{3\times 2^n}$ 與差冪 $\Delta_{3\times 2^{n-1}}$（$= S_{3\times 2^n} - S_{3\times 2^{n-1}}$）的關係。也就是估計了"所失"的上界，在每一觚面上向圓外作一寬爲餘徑、長爲觚面的長方形（見圖6）。這時，可以看出它將小弓形完全包含在相應的小勾股形内。而相應的那些小勾股形之和恰爲差冪 $\Delta_{3\times 2^{n-1}}$。由此即知

"$0 < \delta_{3\times 2^n} < \Delta_{3\times 2^{n-1}}$，它等價於關係式 $S_{3\times 2^n} < S_{圓} < S_{3\times 2^n} + \Delta_{3\times 2^{n-1}}$ 其實，差冪 $\Delta_{3\times 2^{n-1}}$ 在劉徽的割圓圖中表爲一個寬爲餘徑 $d_{3\times 2^{n-1}}$、長爲半觚周 $C_{3\times 2^{n-1}}/2$ 的長條形（見圖4、圖5是由帶黑點的小勾股形所拼成），它能復蓋所失的那些小弓形是顯然的事實。"[4]

當 d=0 時，因差冪＝半觚周×餘徑，故此時差冪爲零，即"所失"亦爲零了。因此，"以一面乘半徑，觚而裁之，每輒自倍。故以半周乘半徑而爲圓冪。"這樣，此時圓的面積與一個長爲半周、寬爲半徑的長方形面積相等，即 $S = (C/2) \times R$。綜上所述，劉徽以割圓術在論證圓田公式時，是以幾何方法並以極限觀念爲理論基礎而獲得的。這在中國數學史中實係首創。

劉徽圓田術注的第二大部分是"以術推率，"即通過觚冪值的計算來推求更精密的圓周率。劉徽計算至一百九十二觚之冪，推得 $157/50 < \pi < 3927/1250$。

在估計圓周率微數時，劉徽注曰："此術微少，而差冪六百二十五分寸之一百五。以十二觚之冪以率消息，當取此分寸之三十六，以增於一百九十二觚之冪以爲圓冪，三百一十四寸、二十五分寸之四。"[5]

對此段注文頗爲費解，關鍵在於"以十二觚之冪以率消息"一語，中外學者，衆說紛紜，莫衷一是。

首先我們認爲"消息"一詞，古今含義不同。關於"消息"的含義，如《易經》說："'日中則昃，月盈則食，天地盈虛，時與消息'。此處'消息'二字可理解爲有增有減的意思。"[6]

對"消息"一詞，"我認爲李潢的校訂是對的，消謂減，息謂增，'消息'在古代有增減、消長的意思，與今天通常的用法不同"[7]。

李繼閔先生說："我認爲'消息'一詞在此劉徽注文中當釋爲'增減'或'損益'無疑。然而，'以十二觚之冪以率消息'一語，文字顯有脫漏而不可解。此句錄自南宋本，殿本校改爲'以十二

觚之冪爲率消息'雖文句較爲通順，但於算理仍不可解。根據上下文意，竊以爲此句當增補爲：以十二觚之差冪爲率，以率消息'。細究劉徽全段注文的意思，是假定差冪與'所失'有固定的比率，從而由九十六觚之差冪 $\Delta_{96}=S_{192}-S_{96}$來估算其所失 $\delta=S_{■}-S_{192}$；將此數加之於已得之 S_{192}，即得圓冪更精密的值。這就是說，由比率關係 $\Delta_{96}:\delta_{192}=\Delta_{12}:\delta_{24}$推算出 $\delta_{192}=36/625$，於是得圓冪 $S=S_{192}+\delta_{192}=314(4/25)$寸^2 即圓周率 $\pi=3927/1250=3.1416$。對此，他十分滿意，不禁寫道：'若此者，蓋盡其纖微矣！'"[8]我們認爲：李繼閔先生的這一段精采的論述，應是對"消息"一詞與[5]之劉徽注文頗爲準確的注釋。

劉徽的極限理論的另一例證是"劉徽原理"。這是劉徽在研究體積時於"陽馬術注"中給出的。劉徽在原理："邪解立方得兩塹堵；邪解塹堵，其爲一陽馬，一爲鱉臑陽馬居二，鱉臑居一，不易之率也。"[9]

按劉徽原理，即斜解一個長方體，所得陽馬與鱉臑體積之比恒爲二比一。對於該命題，劉徽用極限方法予以論證。其證明大要如下："先將陽馬、鱉臑各一合成塹堵，然後按長寬高三度作中截面分之爲九個部分。見圖 7⑤（參見李繼閔《<九章算術>及其劉徽注研究》P454 圖 6—5，本文轉綸）。容易看出，在其 3/4 的體積內'陽馬與鱉臑的體積之比爲二比一'而在其餘的 1/4 體積中又構成了兩對彼比可拼成塹堵的小陽馬與鱉臑；如果再對它們施行同樣的分割，於是剩餘部分的 3/4 中'陽馬與鱉臑體積之比爲二比一'而餘下的 1/4（即原體積的 $1/4^2$）中又構成四對彼此可拼成塹堵的小陽馬與小鱉臑；……如此分割 n 次，則除去原體積的 $1/4^n$ 的剩餘外的絕大部分內，'陽馬與鱉臑體積之比爲二比一'成立。這種分割可以無限繼續下去，因而當分割無限地進行達到極限而剩餘爲零時，便證明了在整個體積中'陽馬居二，鱉臑居一'，即'劉徽原理'成立。"[10]

至此，劉徽注曰："若爲數而窮之，置餘廣、袤、高之數各半之，則四分之三又可知也。半之彌少，其餘彌細。至細曰微，微則無形。由是言之，安取餘哉。數而求之者，謂以情推、不用籌算。"[11]

由上文可知，劉徽在論證過程中使用極限方法，且在無限分解過程中無須作詳細計算，按極限概念即可推知預期的結果。這是嚴密的極限理論的具體體現。

從割圓術到劉徽原理，已看出劉徽早在公元三世紀即已建立起中國數學中的極限理論，運用這一理論準確的得到了相應結果。較之古代西方，處於領先地位。

二、西方的數量觀與極限理論

古代西方以希臘數學爲其代表。希臘數學家認爲，數學不僅是應用於實際問題的工具，而且是理解宇宙的鑰匙，是自然知識的一個組成部分；因而，希臘人的數學觀是從屬於他們的自然觀的。其代表人物畢達哥拉斯（Pythagoras 公元前 574—497）認爲："數是萬物的本質，宇宙的組織在其規定中通常是數及其關係的和諧的體系。"[12]在希臘人的觀念中，"數"這個詞，指的是正整數。而對於形如 p/q 的分數，他們認爲是兩個整數 p 與 q 之間的一個關係或是一個比 p : q。即他們的數的觀點是離散的，且認爲任何兩個綫段都是可以公度的。因而，他們的幾何學的基礎是離散數的概念與關於整數的比例理論。

對於數是離散的這種概念，亞里士多德（Aristotle，公元前 384—322）給出了更爲明確的

定義:“數量或者是離散的,或者是連續的。……數和語言是離散數量的例子;綫、面、體以及時間、空間是連續量的例子。”併進一步概述數與量的特征:“一般的說,數的各個部分之間決不可能存在共同邊界,它們總是分離的,因此,數是一種離散的數量。”[13] 這就意味着希臘人存在着一些不能用數來度量的幾何量。正是由於堅持“數”只能是正整數的錯誤偏見,使得某些幾何綫段的不可通約,終於導致了數學史上的第一次數學基礎的危機。

對於幾何中求圓的面積與截棱錐體乃至球體體積的問題,希臘數學家試圖從理論上去解釋,然而,卻遇到了極大的困難。困難在於去確定面積與體積時,往往會產生無理量與無限過程的問題。希臘人對不可通約量的態度持頑固的哲學偏見。正如T.丹齊克在《數,科學的語言》一書中所說的:“正方形的對角綫是不可用邊來度量的。究竟什麼人首先建立這條定理以及它如何得出的,這大概是千古不破之迷了……但不論是誰發現的,它使畢達哥拉斯派諸人大爲震驚則是毫無疑義的。給這類數量所取的名字就是最好的證據,這種不可度量的數被叫做阿洛貢,即不可說之意,而且他們立誓不泄露此類數量存在的秘密”。[14]

但現實世界里存在着不可公度量的事實併不因畢氏學派的守秘而不顯露出來。這樣,再也不能用畢氏學派的整數比例理論來比較幾何量之比了。幾何基礎方面的這種危機由雅典的柏拉圖學園的學者、公元前4世紀最偉大的數學家歐多克斯(Eudoxus,公元前約408—355)予以消除。歐多克斯的成功關鍵在於給出了適當的幾何比例的定義。

定義:設a與b是一對同類的幾何量,c與d是另一對同類的幾何量;則兩個比a∶b與c∶d成比例,a∶b=c∶d。

如果給定任意兩個正整數m和n,下列關係之一成立:$na>mb$ 和 $nc>md$ (Ⅰ) 或者 $na=mb$ 和 $nc=md$, (Ⅱ) 或者 $na<mb$ 和 $nc<md$. (Ⅲ)

可以看出,歐多克斯的幾何量之比例的定義,爲了迴避無理數的出現而不得不用一種隱蔽而繁瑣的方式說出了在整數之比成比例的情況下本來很顯然的事實。此外,還可以看出,當給定兩個不可公度量a與b時,這個定義實際上是把全體有理數m/n劃分成兩個不相交的集合L和U;對於集合L,(Ⅰ)式成立,即$m∶n<a∶b$;對於集合U,(Ⅲ)式成立,即$m∶n>a∶b$。這樣把全體有理數劃分成兩個不相交的集合L和U,使得L的每一個元素都小於U的每一個元素,現在稱爲“戴德金分割”。19世紀德國數學家R.戴德金(Dedekind, Richard, 1831—1916)把實數嚴格地定義爲這樣的有理數的“分割”。因此,從本質上講,歐多克斯實際上是用現今所謂的有理數的“戴德金分割”來“隱涵”幾何量的連續性,卻又掩蓋了無理數的存在。

對於曲綫圖形,希臘人在直觀的基礎上假設象圓這類簡單的曲綫圖形均具有面積,而且認爲它們的面積與多邊形的面積是同一類的幾何量。如歐幾里得《幾何原本》卷Ⅻ命題2有:“圓與圓之比如同直徑上正方形之比”[15]。

在確定曲綫圖形時,他們試圖借助於所謂“窮竭法”(由歐多克斯提出)。其目的是想用一種嚴格的處理方法來代替當$n\to\infty$時取圓內接多邊形的極限。但由於希臘人“對無限的恐懼”,這也許是使得窮竭法在邏輯上不甚清晰的原因。

但無論如何,問題的關鍵在於證明:當把n取得足夠大時,使得圓的圖形S與其內接多邊形P_n之差的面積$a=S-P_n$爲任意小。這種思想其本質是基於所謂“歐多克斯原理”:

“設給定兩個不相等的量,如果從其中較大的量減去比它的一半大的量,再從所餘的量減去它的一半大的量,繼續重復這個過程,則所餘的某一個量將小於給定的較小的量。[16]”

利用這個原理即可證明可以用内接正多邊形"窮竭"圓的面積。

阿基米德(Archimeds,公元前 287—212)在《圓的度量》中給出圓的面積定量:"圓的面積與一個兩條直角邊分别等於其周長和半徑的直角三角形的面積相等"[17]。

阿基米德將歐多克斯的窮竭法發展成所謂"括約法"(method of compression),從而給出了上述定理的嚴格證明。由於該定理僅涉及幾何量而與數無關,從而避免了可能出現無理數的麻煩。

"括約法"或者就邏輯而言屬"雙歸謬法"(reductioad absurdun)證明了關於圓面積定理,但就本質而言仍是用内接或外切正多邊形來逼近圓,這與極限方法截然不同。因而,它與"無限的"極限過程毫無關係。正如卡爾.B.波耶在《微積分概念史》中所說:

"(窮竭法或括約法)與我們今天關於數和極限的概念並不相干,而只是一些迂回曲折繞過這些概念的途徑"[18]。

因而,把阿基米德的幾何演算說成是引向極限的通道,是不確切的。

因此,即使站在希臘數學最高峰的阿基米德,也未能建立起極限方法與極限理論。

在西方,系統的運用無窮小方法計算面積和體積的是由 B·卡瓦列利(Cavalieri, 1598—1647)通過《不可分量的幾何學》(Geometric indirisibilibas, 1635)和《六道幾何練習題》(Exercitationes geometricae sex, 1647)這兩本著作而得到推廣的。卡瓦列利定理所産生的實際效果,隱涵着在體積計算中的極限過程的作用。這一極限方法的誕生距離阿基米德時代實在是太遥遠了。

三、中、西方極限理論之評析

對中、西方極限理論發展歷史作一比較,有助於了解二者所形成的完全不同的數學風格。這種風格迥異的形成,其重要根源之一在於二者在數量觀方面的差異,數與量的觀念是數學的基本概念,而古代中國與希臘有着各自不同的學術淵源,在數與幾何量的觀念方面的差異,導致了各具特色的不同的數學風格。連續的幾何量與數相統一抑或割裂?這是古代中國與希臘在數學觀念上的一個根本分野。由此決定了東西方數學在處理衆多一類問題時所采用的各種不同方法,正是由於兩種數學觀念與數學方法的相殊,因而對指導和發展數學途徑的歷史亦迥然相異。

如前所述,中國在春秋戰國時代即産生了極限思想與極限概念的萌芽,而到公元 3 世紀即劉徽時代,極限概念已趨成熟。例如無理數的出現,早在《九章》"開方術"中即已有之。術中有云:"若開之不盡者,爲不可開,當以面命之[19]。何謂"以面命之"?"面",即現今所說的"根"。因而,對於引進不盡方根概念的態度,認爲是極爲自然的事。而對於極限概念的産生與應用,也同樣認爲是完全合乎數學發展的自然趨勢。正因如此,使得劉徽在注釋《九章》時,闡述了成熟的極限概念與極限思想:割圓術與陽馬術注,在中世紀數壇上除劉徽外無第二人。因分解一個陽馬與一個鱉臑成無窮多個部分,在客觀世界中難以具有這樣的原型,其難度之大,可以想象,然而,卻由於劉徽以其深刻的極限思想,豐富的想象力,依靠情推,即解決了這個極爲困難的問題。而在 19 世紀上半葉,高斯(Gauss,1777—1855)提出了對解決錐體體積若不借助於無窮小是不可能的猜想,但卻早在公元 3 世紀的劉徽即已開始探討歐洲一千五、六百年後才提出的問

題，這不能不認爲是中國古代數學的光榮，中華民族的驕傲。

當然，我們也看到，劉徽僅解決諸如圓與多面體等的特殊問題。這裏，我們認爲"我們不能苛求古人超越歷史條件寫出絕對嚴格的解析證明；同樣，我們也不能把劉徽的論證說得天衣無縫，而舛失古義。"[20]

從形式上看，"劉徽原理"與歐多克斯所證之三棱錐體積公式所作的"分割"是類似的。但是，劉徽的方法與歐多克斯方法有着本質的不同。在分割過程中劉徽的方法是使用無限的極限過程，而歐多克斯的方法則是形式邏輯的有限的"雙歸謬法"。這兩種方法的差異，反映出古代東、西方數學在求積理論上的不同風格。而這，正是由於東西方不同的學術淵源與文化歷史背景諸多因素所決定的。其內涵應該視爲東、西方不同的數量觀所蘊含的基本因素的作用。

在西方，正如著名數學史家波耶(Boyer)指出的："希臘的數學家從未象我們取極限那樣把上面所講過的步驟真正進行到無窮"。[21]

到中世紀，西方數學家發現了一些新方法，應用這些新方法來解決求面積和求體積的問題較之應用窮竭法要方便得多。在這種新方法的倡導下，雖然希臘人"對於無限的恐懼"，阻礙了發展很有用的極限理論來代替到處出現的雙歸謬法的證明。但是，作爲中世紀經院哲學家不再拒絶引入無窮小法。希臘人堅持絶對的嚴格性，所以把無理量排除在數的範圍以外(因而把數排除在幾何學以外)；相反，這時無理數已經可以自由使用，雖然作爲數它們還不具有邏輯基礎，而只有作爲幾何量才能嚴格解釋。此外，韋達和笛卡爾的符號代數促進了形式方法的發展，它所强調的是計算機方法而不是邏輯證明。

"阿基米德研究的問題，代數的計算方法以及關於無限的直觀概念的自由運用，這些促進數學發展的重要因素，在牛頓和萊布尼兹時代以前的這個'孕育世紀'中，產生了用來解決面積和體積問題的許多强有力的無窮小方法"。[22]

由上述內容可以看出，在西方，對窮竭法的改進中，至文藝復興時期才出現了與劉徽相近的求圓面積的方法。

"我們通觀十六、十七世紀歐洲微積分學發展歷史，雖然它以對古希臘學者阿基米德等人的著作的研究爲起點，但正如卡爾. B. 波耶的評述，這些探索者們並非繼承希臘人的思想與傳統而沿着老路往下走。相反地，史蒂汶、瓦雷里歐、開普勒、伽利略、卡瓦列利、托里拆利等衆多學者正是看到古希臘數學在處理無限數學方面的失敗而轉向，事實上朝着東方數學算法傳統的道路前進"[23]。而近代歐洲學者在引進了實數系統與建立符號以後，才逐步發展了無限的數學觀念與極限方法，形成了較爲嚴格的極限理論。綜上所述，我們認爲：古代西方數學的代表希臘式數學所創導的數學模式，表現於所謂演繹推理的"演繹傾向"；而古代東方的中國數學，則注重於所謂寓理於算的"算法傾向"。在世界數學史中，演繹傾向與算法傾向總是相互交替的取得數學領域中的主導地位，成爲一個時期的數學的主流。而這就是東、西方數學相互交替興衰和消長的重要原因。

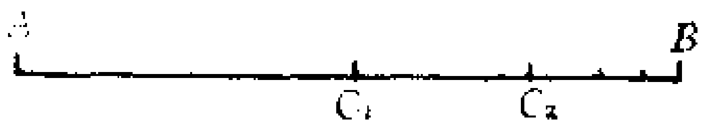


圖 1

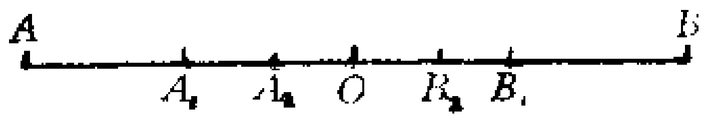


圖 2

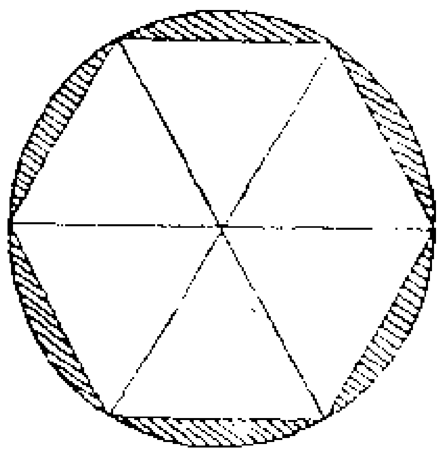


圖 3

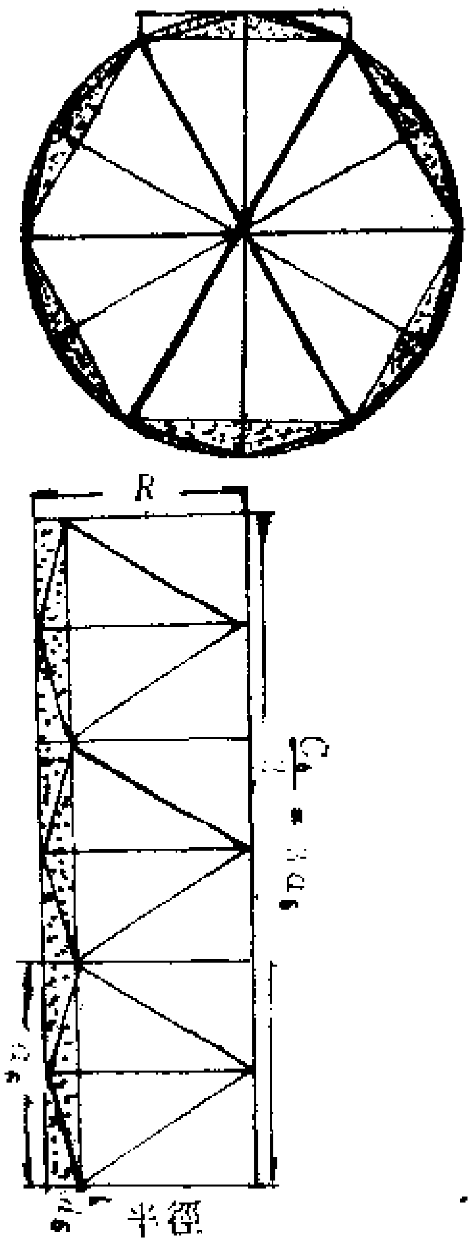


圖 4

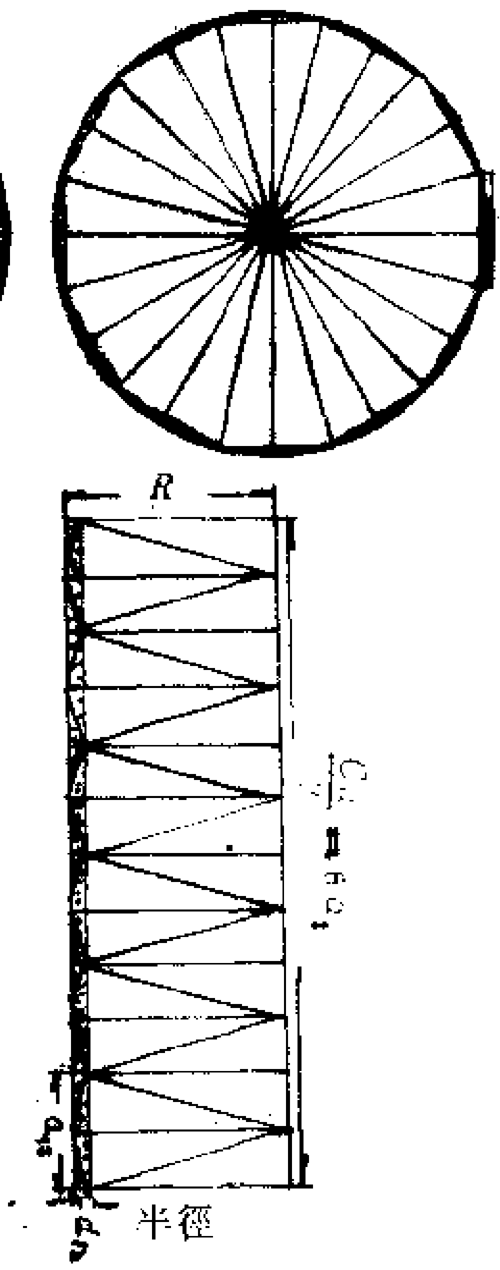


圖 5



圖 6

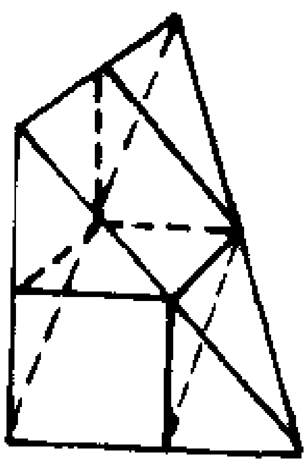


圖 7

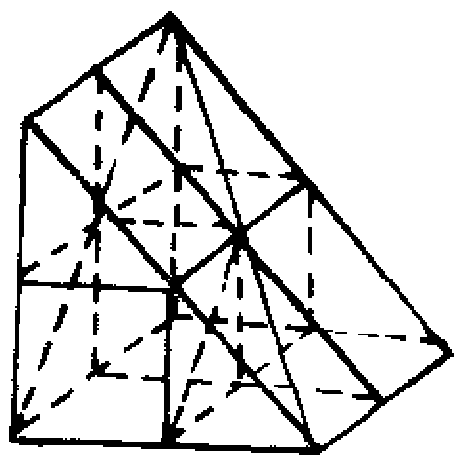


圖 8

參考文獻

[1] 李繼閔,《＜九章算術＞及其劉徽注研究》,陝西人民教育出版社,1990、438。

[2] 同[1],440。

[3] 白尚恕,《＜九章算術＞注釋》科學出版社,1983、35。

[4] 同[1],225－256;[5]同[3],36,[6]同[3],48。

[7] 郭書春,《科學史集刊》,11(1984)40。

[8] 同[1],267－269;[9]同[3],150;[10]同[1],454;[11] 同[3],152。

[12] 中外數學史編寫組,《外國數學簡史》,山東教育出版社,1987,70。

[13] 同[1],442－443。

[14] T.丹齊克,《數.科學的語言》。中譯本 444－445。

[15] 蘭紀正、朱恩寬譯,《幾何原本》,陝西科學技術出版社,1990,590。

[16].[17],C.H.愛德華,《微積分發展史》,北京出版社,1987,22－42。

[18] 參見[1],453;[19]同[3],103;[20]同[1],258。

[21] B.Bover,《微積分概念史》,上海人民出版社,1977,38。

[22] 同[16],134,

[23] 同[1],462。

日高圖復原

——《周髀》雜論之一

曲安京
（西北大學數學系）

日高圖，即日高公式證明圖，最早載於現傳第一部完整的天算著作《周髀算經》。

由於日高公式是中國古典數學的一個別具特色的重要分支——重差理論的最基本定理，探討它的來源不僅對於理清重差理論的發生發展意義重大，而且在一定程度上有助於人們更加深刻地體會和把握中算的思想與方法，因此，對日高圖的研究頗受數學史界的重視。

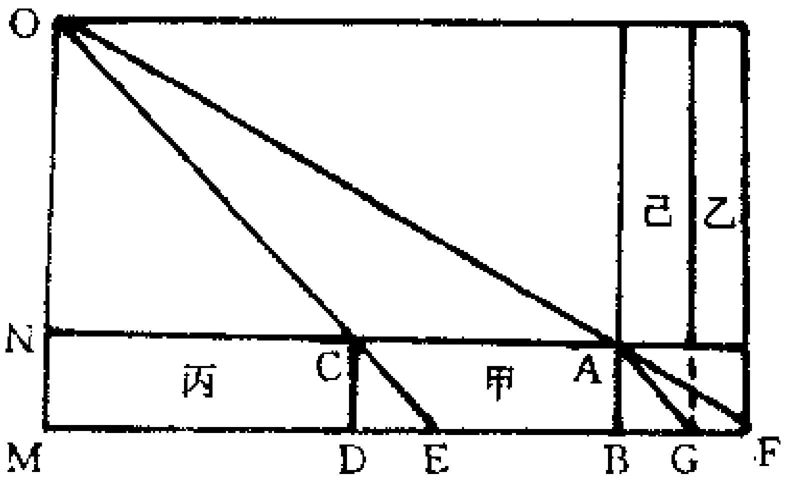


圖 1　錢補日高圖

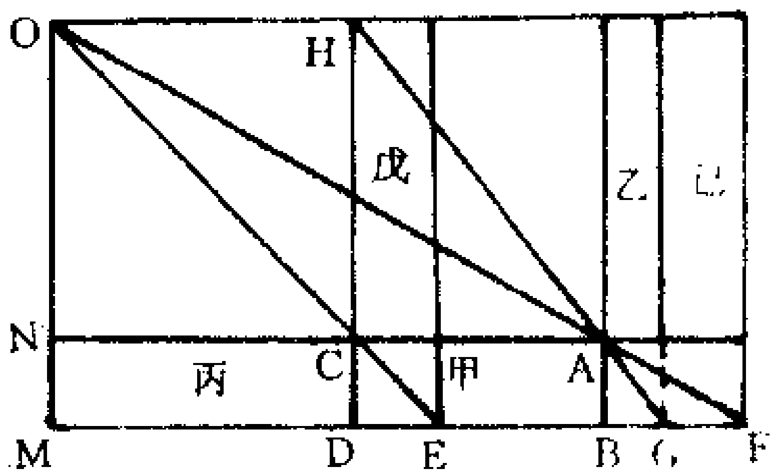


圖 2　吳補日高圖

錢寶琮先生校點《算經十書・周髀算經》時，指出傳本日高圖俱誤，並"依趙爽注重繪"，如圖 1：O 點爲太陽所在，AB、CD 分別爲直立於水平大地 MF 的兩只表，DE 與 BF 分別爲表 CD、AB 的影長。

過 A 點作 CE 的平行綫交 BF 於 G，取己的寬等於 BG，於是丙的面積＝己的面積，按甲＋丙＝乙＋己，立得"黃甲與黃乙其實正等"，從而有

$$日高\ OM=\frac{表高\ AB\times 兩表間距\ BD}{兩表影長之差\ GF}+表高\ AB \qquad (1)$$

此即著名的日高公式。

由於錢先生在圖 1 中添加了一條平行綫 AG，與中算家利用幾何圖形論證各種公式時絕鮮考慮綫段之角度與平行關係的習慣相悖，因此受到吳文俊先生的嚴厲批評[1]。吳先生利用"矩形之內勾中容橫與股中容直等積"這一原理，再度"據趙爽注"，重新補繪日高圖，如圖 2：太陽、表高、日影與圖 1 同。連接 AH 延長使交於大地 BF 於 G，這裏的 G 與圖 1 中點 G 的位置不同，乙與己剛好顛倒位置。

證明步驟爲：∵甲＝乙，由甲＋丙＝乙＋己，知丙＝己，又丙＝戊，∴戊＝己，從而知己之寬爲前表DC之影長，於是己之寬BG爲兩表影長之差。日高公式(1)由此導出。

1986年出版的《中國數學簡史》中曾依吳先生的復原原則對圖已稍加改動，得圖3：去掉圖2中之斜綫HG，∵丙＝戊，平移戊至己，則甲＝己，而乙之寬爲兩表影長之差。

可以認爲，圖3之證明更簡明。古人完全有可能依圖2或圖3來論證日高公式(1)。

那麼是否能夠由此確斷趙爽所注日高圖就是圖2或圖3呢？我以爲不可。

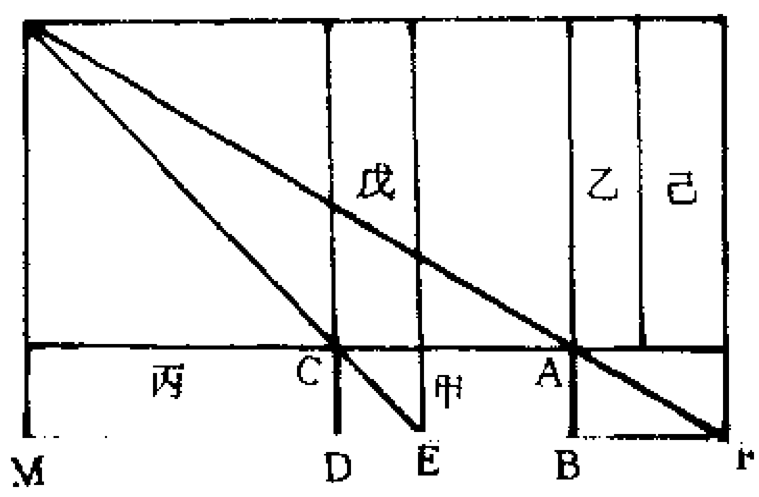


圖3　簡化日高圖

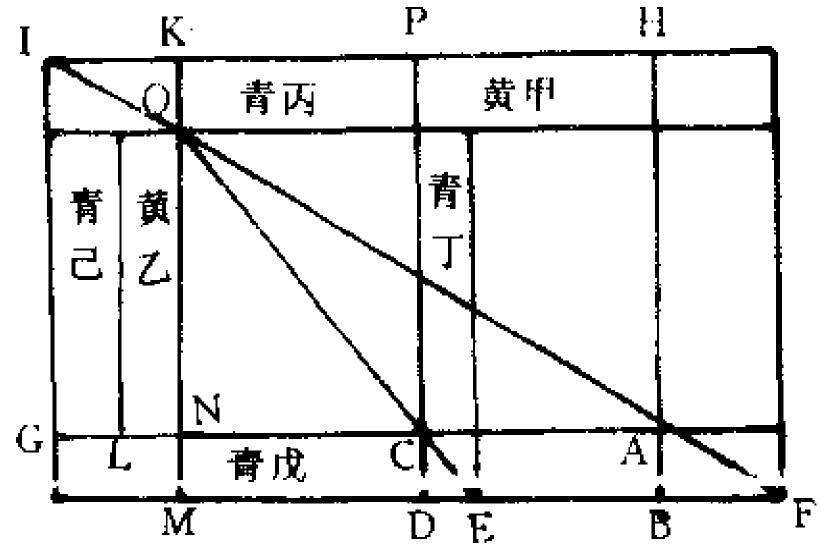


圖4　曲補日高圖

誠如吳先生所說："現在所補的證與圖似尚未能與原文完全相符(例如有甲乙丙與戊己而無丁)"。按連續計數的原則，圖中已有戊己而缺丁，確乎算是一個漏洞，不過將圖2圖3對照趙注原文，對日高公式的證明已經完全，絕不需要再在圖上切割其它部位來補充或加强論證。也就是說，在圖2或圖3上，"漏洞丁"似無法彌補。

不過，更大的疑問還不在此。當我們把目光從趙爽注中稍稍下移，便可看到甄鸞的如下注文：

"王城去天名曰甲，日底地上至日名曰乙，上天名青丙，下地名青戊。"

按前述諸圖，甲在王城地面與天無關，乙在立表AB之上與日相去甚遠，青丙位於地下，而青戊卻直立上天。所描述的四個位置幾乎與圖示完全倒置。

經過上述分析，我們推斷，圖2或圖3雖然簡明，但恐非傳本《周髀》之原圖。爲破解原圖之謎，必須認真考究甄鸞的注釋。

由於趙爽與甄鸞都明確指出黃甲爲表高與兩表相去構成的矩形，且趙注稱黃甲與青丙相連，因此，青丙亦應以表高爲其寬，又據甄注稱上天名青丙，於是可推知青丙應置於日高圖上方，所以黃甲亦應隨之上天，這又與甄注"王城去天名曰甲"有些貼合。那麼，試想將前述諸圖中之黃甲與青丙平移全圖的上方又將如何呢？思路至此，遂繪出圖4。

圖4中仍以O代表太陽，AB、CD爲大地平面MF上直立的兩根表，BF與DE分別爲其影長。OK＝AB，IK＝BF。黃甲＝表高(KO)×兩表間距DB。

顯然，青丙＝青戊；對於▭OE，有青戊＝青丁，在▭OG中裁出一塊使青己＝青丁，於是有青己＝青丙。又在▭IA中知青丙＋黃甲＝青己＋黃乙，∴黃甲＝黃乙。按青丁之寬DE爲前表影長，而▭GO之寬KI爲後表AB之影長，故有黃乙之寬NL爲兩表影長之差(BF－DE)。由

此即得日高公式(1)。

那麼圖 4 與趙、甄二注全文是否完全吻合呢？且看如下對照：

趙爽日高圖注

注文	今釋
黃甲與黃乙其實正等。以表高乘兩表相去爲黃甲之實。	是爲結論，日高公式將由此導出。AB×DB 爲黃甲面積，定義了黃甲的形狀及其面積大小。
以影差爲黃乙之廣而一，所得則變得黃乙之袤，上與日齊[2]。	已知黃乙之寬 LN 爲兩表影長之差(BF－DE)，由黃甲＝黃乙，可得黃乙之高 $ON=\frac{AB\times DB}{BF-DE}$，高的頂端與太陽重合。
按圖當加表高，今言八萬里者，從表以上復加之。	從圖 4 看，太陽的高度 OM 還應在黃乙之高 ON 的長度上再加一表高 NM。蓋天說中日高八萬里，指的是表端以上的高度 ON。
青丙與青己其實亦等；黃甲與青丙相連，黃乙與青己相連，其實亦等；皆以影長爲廣[3]。	由丙＝戊＝丁＝己，知青丙＝青己；在矩形 AI 中，黃甲＋青丙＝黃乙＋青己(分別爲勾中容橫與股中容直)；青己以前表影長(GL＝DE)爲寬，黃乙＋青己以後表影長爲寬(GN＝BF)。

甄鸞注曰：求日高法

注　文	今　釋
先置表高八尺爲八萬里爲袤，以兩表相去二千里爲廣，乘袤八萬里得一億六千萬里，爲黃甲之實；以影差二寸爲二千里爲法，除之，得黃乙之袤八萬里，即上與日齊。	以 8 尺之表相當於八萬里爲黃甲之高，以兩表間距 BD 爲二千里爲黃甲之寬，高乘寬得一億六千萬里，是爲黃甲面積；以兩表影長之差(BF－DE) 2 寸相當於二千里(可視爲黃乙之寬 LN)，用以去除黃甲的面積，即得黃乙之高爲 8 萬里，這個結果在圖 4 中表示從表頂起算適與太陽齊高。
此言王城去天名曰甲[4]，日底地上至日名曰乙，上天名青丙，下地名青戊。	這裡所言的黃甲在王城的上天，從太陽正下方地面到太陽的空間爲黃乙所在(略去 8 尺表高 MN)，從觀測點(前表 CD)上天到太陽的那段天空爲青丙，其正下方地面爲青戊。
據影六尺，王城上天南至日六萬里；王城南至日底地亦六萬里，是上下等數。(下略)	由青丙＝青戊＝青己及日高公式(1)，可得前表南至日 $MD=前表影長\ DE\times\frac{兩表相間(BD)}{兩表影差(BF-DE)}$，由此得影差原理：太陽在南北向平移 1 千里則影長差 1 寸，今當表影爲 6 尺，則有表距太陽水平距高爲 6 萬里。由青丙＝青己入算，得王城上天南至日(KP)6 萬里；若據青戊＝青己入算，則得王城南至日底地面(DM)亦 6 萬里。上下相等(KP＝DM)。

按圖 4，補出丁，因與其它三青（丙、戊、己）等積，故名青丁。由上述與趙、甄二注的對照可見，圖 4 中青丁的補出不僅成爲日高公式論證的一個必要環節，而且可以完滿地疏通全部日高圖注文字，并且丙、丁、戊、己按順時針依序布列，構圖思路還是不失自然的。盡管圖 4 較之圖 2、圖 3 略微復雜，證明過程也似嫌曲折，但從其論證的思想與方法及其同原注文的貼合程度判斷，我認爲它極有可能是傳本《周髀算經》中的原圖，至少可以確斷它是甄鸞爲之做注的日高圖。

本文爲 1991 年 9 月初稿，在 10 月初由紀志剛先生主持、李繼閔教授、王榮彬等先生參加的討論會上聽取了修改意見，當此定稿之際，謹向諸位師友表示誠摯謝意。

參考文獻與注釋

[1] 吳文俊，《科技史文集》，第 8 輯，1982，10～30。

[2] 各本中兩個黄乙皆爲"黄甲"，此依錢寶琮校點《算經十書》校改。

[3] 各本均爲"皆以影差爲廣"，錢校本以爲衍文，刪去。王榮彬認爲"差"爲"長"之誤，甚是，今從之。

[4] 各本皆爲"王城去天名曰甲"，按"去"之意本爲"到、往、至"，從王城去天，似應表示一個高度，但依黄甲之定義，似並無表示高度的含義。據圖 4 所示，疑"去"爲"上"之誤。按黄甲位於兩表之間的上天，由於立表測望在王城進行，據趙爽稱："記雲神州之土方五千里，雖差一寸，不出畿地之分"。畿地即古代王城所在千里地面，按千里影差一寸，在王城前后各千里處立表測望，則兩表間距地面皆屬王城範圍，因此黄甲應稱爲"王城上天"。

對《五經算術》的初步研究

魏保華
（內蒙古師範大學科學史研究所）

《五經算術》上，下卷由南北朝北周（556－581）甄鸞撰寫，該書詳細地解釋了《尚書》、《詩經》及《三禮》、《論語》、《春秋》等經典中有關算術的內容。該書的數學知識雖普通，但由於是儒家經典的注解，且保存了漢以前的一些數學和律歷知識，自漢以來又獨尊儒術，所以唐宋時，《五經算術》便成爲官府學校確定的《算經十書》之一，流傳於後世。過去認爲這部書內容淺顯，故論文不多。本文從數學文化史觀點來探討，對《五經算術》進行較全面的研究，以彌補這方面的不足。

東漢自章、和（76－104）以後，召集名儒學士在東觀著作國史。魏明帝太和年間（227－233）開始設置著作郎，作爲史官。西晉又於著作郎之外，置佐著作郎八人，東晉至隋大體沿此例。這時，人們研究經學、史學的風氣日盛。由於造紙術的進步，史書數量日增。從殷商到西漢一千八百年有史書二百餘部，而東漢末至隋僅四百多年，史書多達一千二百部，且種類繁多，有禮儀制度史，諸子經典的注解等。

漢武帝時，董仲舒提出獨尊儒術，罷黜百家，把帝王神化，以帝王代天行道，德刑并用，三綱五常，通過神化自然，把封建等級倫理關係神聖化，服務於封建宗法專制統治。於是，注釋儒家經典者日眾，著名的有鄭玄等人。史載鄭玄兼治今古文，遍注群經，凡百餘萬言，黃巾軍皆知其名，不犯其境[1]。時人崇尚治經，可見一斑。漢代比較重視算術。史書說："數者一、十、百、千、萬也，所以算術使事物，順性命之理也。……其法在算術，宣於天下。小學是則，職在太史，羲和掌之"[2]。

漢代佛教傳人中國。西漢時，"張騫始聞有浮圖之教"[3]。漢明帝時，"中國有沙門及跪拜之法，自此始也"[4]。楚王劉英在永平八年"已祠浮屠，翻譯佛典凡數百部"[5]，其中有《佛本行》等。至桓帝時，"聞宮中立黃老，佛屠之炭祠，此道清虛，貴尚無爲、好生惡殺，省欲去奢"[6]。但是同時，"其漢人皆不得出家，魏承漢制，亦循前軌"[7]。當時對待佛教，就象清代對待天主教一樣，禁止人民信奉。北魏太武帝時，因信道教，反對佛教，"兼惡沙門不法，遂盛成殺戮"[8]。此時南朝劉宋不禁佛教，佛徒多到南方避難。北周武帝崇尚儒教，對儒、道、佛三教辯論多年。"天和元年（566）五月，帝御正武殿，集群臣親講禮記。…三年八月，帝御大德殿，集百僚及沙門、道士等親講禮記。…四年二月，帝御大德殿，集百僚及沙門、道士等討論釋老義"[9]。這時，甄鸞寫了《笑道論》來反對道教，宣揚佛教。但是到建德二年（573），"武帝復集群臣及沙門、道士等，帝升高座，辨釋三教先後，以儒教爲先，道教爲次，佛教爲後"[10]。一年後，周武帝禁絕佛、道二教，獨尊儒教。"三年五月丙子，初斷佛道二教，經像悉毀，罷沙門、道士，并令還民。并禁諸淫祀，禮典所不

載，盡除之。…然猶立道觀，以闡教義"[11]。甄鸞因信奉佛教，自此以後不被朝廷所重視。

魏晉南北朝時，學術研究很活躍，學者不僅因襲漢代經學，而且注重自然科學。如劉徽注《九章算術》，祖冲之求出圓周率的精確值，以及王蕃、陸績製造渾天儀象，裴秀、謝莊繪製地圖等，而甄鸞注解《九章算術》等七部算經，他自己又撰寫了《五曹算經》。

甄鸞生活的時代崇尚儒家思想，北周武帝曾多次講解儒家經典。但是，周禮樂律在秦漢之際已經失傳。魏晉南北朝時，"禮崩樂壞，所用雅樂，皆胡聲也。樂之不傳，律之不明，古樂亡而音韵之學興"[12]。漢魏之際，文章已趨於排偶，至齊梁時形成駢文，五言詩也成爲後來律詩的開端。爲恢復古樂，對儒家經典中音律等進行注釋。甄鸞精於曆算，解釋了五經中有關算術的部分，撰寫了《五經算術》。這以前，印度佛教大量傳入中國。東漢永平十年(67)翻譯了《佛本行》，《華嚴經》和《俱舍論》分別翻譯於東晉義熙十四年(418)和陳大光元年(567)。東魏興和三年(541)又譯出《摩訶迦葉經》兩卷，收入《大寶積經》中。還有《婆羅門天文經》二十一卷，《婆羅門竭伽仙人天文說》三十卷，《婆羅門天文》一卷，《摩登伽經說星圖》一卷。這些佛經中有大、小數名稱及進位制等。甄鸞熟讀佛經，他用《華嚴經》和《楞伽經》中的計數法解釋算經。他撰《五經算術》中也有大數進位制，這部算經可能受到《華嚴經》等佛教經典的間接影響。

在《五經算術》中，甄鸞對《尚書》、《詩經》、《周易》、《周官》、《禮記》、《論語》等經籍中的數學知識部分作了詳細的注解。《尚書》堯典篇有"以閏月定四時成歲"，他用後世的四分曆法去解釋它，應用了分數計算。《尚書》呂刑篇"兆民賴之"，《詩經》伐檀篇"胡取禾三百億兮"、豐年篇"萬億及秭"，有兆，億，秭三個大數名稱。他解釋了毛萇、鄭玄的古注，又提出新的大數進法——萬萬進法。他在解釋《論語》學而篇"千乘之國"時，認爲千乘之國的面積是90億萬步即十萬方里，用開方法，知道是方邊長316里68$\frac{62576}{189737}$步的正方形。他還用勾股定理去解釋《周官・考工記》車蓋法，用等比級數去解釋《儀禮》喪服絰帶法。他計算了《禮記》月令所記的十二律管的長度，又計算了京房六十律的管長。《左傳》中有許多曆日的記錄，他用六種四分曆中的周曆來解釋。以下分別加以討論。

1. 關於分數的運算。

秦朝沿用古代六種四分曆，以一回歸年爲365$\frac{1}{4}$日，一朔望月爲29$\frac{499}{940}$日。早在公元前600年左右，中國春秋時天文學家就發現19年章法，即在19個太陰年中插入7個閏月。19年章法在東漢元和二年(85)實施的四分曆中得到應用。在《五經算術》上卷中，甄鸞用四分曆的方法解釋了《尚書》堯典篇的"帝曰，咨汝羲暨和，期三百有六旬有六日。以閏月定四時成歲"這句話。

他首先以一回歸年爲365$\frac{1}{4}$日，一朔望月爲29$\frac{499}{940}$，求出"一歲之閏"爲：

$365\frac{1}{4}-12\times29\frac{499}{940}=10\frac{827}{940}$，"十九年七閏"爲 $19\times10\frac{827}{940}\div29\frac{499}{940}=7$

在《周髀》中也有類似的分數計算：

$354\frac{348}{940}\times13\frac{7}{19}\div365\frac{1}{4}$ 和 $383\frac{847}{940}\times13\frac{7}{19}\div365\frac{1}{4}$

不同於《周髀》之處是，甄鸞用了既約分數。

在《五經算術》卷下，甄鸞解釋了《春秋・魯僖公》的經文："五年春王正月辛亥朔日南至"。

李淳風按:從周曆上元丁巳至僖公五年丙寅,積年2759769。元法4560,章歲19,章月235,周天分27759,日法940。有下列運算:$2759769/4560=605\frac{969}{4560}$,$969\times235/19=227715/19=11985$爲積月,甄鸞有$11985\times27759=332691615$爲朔積分。

$332691615/940=353927$爲積日,不盡235/940,235爲小餘,$353927/60=5898\frac{47}{60}$,47爲大餘。命以甲子算外,即正月辛亥朔。這些分數運算比較復雜,其餘的曆法運算與此類似。

2. 關於大數進位制。

《尚書》、《詩經》中有兆、億、秭三個大數名稱,有的只用來表示數量衆多,無具體涵義,毛萇和鄭玄用十進位制或萬進位制來注釋,而甄鸞則用萬萬進位制來解釋。《尚書》說:"天子曰兆民,諸侯曰萬民。"鄭玄說:"億萬曰兆。天子曰兆民,諸侯曰萬民。"從億至兆是萬進位。甄鸞按照周制,分封土地爲正方形,王地邊長一千里,諸候地邊長一百里,王地面積一百萬稱爲兆,諸候爲一萬。這里十萬爲億,百萬爲兆,是十進位制。先秦大數記法是十進位制,《國語·鄭語》中史伯對鄭桓公說,"合十數以訓百體,出千品,具萬方,計億事,材兆物,收經入,行垓極。"《逸周書》世俘篇,"武王俘商舊寶玉萬四千,佩玉億有八萬。"甄鸞《五經算術》說:"黄帝爲法,數有十等。及其用也,乃有三焉。十等者,謂億、兆、京、垓、秭、壤、溝、澗、正、載也。三等者謂上、中、下。其下數者,十十變之。若言十萬曰億,十億曰兆,十兆曰京也。中數者,萬萬變之,若言萬萬曰億,萬萬億曰兆,萬萬兆曰京也。上數者,數窮則變。若言萬萬曰億,億億曰兆,兆兆曰京也。"他提出十進位、萬萬進位,倍進位三種大數進位法。顯然後兩種進位制是新出現的。

有關黄帝隸首作數的傳說,最早見於《世本》,後世皆稱"隸首作數",但沒有說作數的方法。《周髀》、《九章算術》都沒有"隸首作數"的記載。《數術記遺》有了"隸首注術,乃有多種",又說:"黄帝爲法,數有十等。及其用也,乃有三焉。十等者,億、兆、京、垓、秭、壤、溝、澗、正、載。三等者,謂上、中、下也。其下數者,十十變之,若言十萬曰億,十億曰兆,十兆曰京也。中數者,萬萬變之,若言萬萬曰億,萬萬億曰兆,萬萬兆曰京也。上數者,數窮則變,若言萬萬曰億,億億曰兆,兆兆曰京也。從億至載,終於大衍。下數淺短,計事則不盡。上數宏廓,世不可用。故其傳業,惟以中數耳。"三種進位制與《五經算術》完全相同。唐朝司馬貞、房玄齡、李賢等也稱:"隸首作算數",顯然來源於《世本》。

除了《數術記遺》和《五經算術》之外,《孫子算經》的大數進位制是:"量之所起,…十斛六億粟;百斛六兆粟,千斛六京粟,萬斛六陔粟,十萬斛六秭粟,百萬斛六壤粟,千萬斛六溝粟,萬萬斛爲一億斛,六澗粟,十億六正粟,百億斛六載粟。"從一到萬是十進位制,從萬到億是萬進位制,從億到載是十進位制。又說:"凡大數之法:萬萬曰億,萬萬億曰兆,萬萬兆曰京,萬萬京曰陔,萬萬陔曰秭,萬萬秭曰壤,萬萬壤曰溝,萬萬溝曰澗,萬萬澗曰正,萬萬正曰載。"這是萬萬進位制,和《五經算術》大數記法中的中數法相同。"量之所起"中的進位法,和"大數之法"中的進位法顯然不是同一時代。

《數術記遺》是東漢徐岳撰寫,也有人認爲該書是甄鸞假托徐岳之名而寫的[12]。人們認爲,甄鸞注釋《孫子算經》之後,可能附加了"大數之法"一節。甄鸞注釋了董泉的《三等數》,該書可能講大數進位制,但已經失傳。佛經於東漢時已傳入中國,在以上各算經之前,且佛經中有十進、百進、萬萬進和倍進位制,而以後中國便有了後三種進位制。甄鸞的大數進位法很可能來源於《三等數》,而後者是否來源於佛經,就不得而知了。

印度《華嚴經》稱:"一百洛叉(lakas)爲一俱胝(koti),俱胝俱胝爲一阿庚多(ayuta),阿庚多阿庚多爲一那由他,…",這是倍進位制。因此唐代就有了十進、百進、倍進位制之說。

元代朱世傑的《算學啓蒙》説"小數之類:一、分、厘、毫、絲、忽、微、纖、沙、埃、渺、模糊、逡巡、須臾、瞬息、彈指、刹那、六德、虚空、清、靜。"從個位一到億分位沙,都是十進位,從億分位沙以下都是萬萬進位制,而沙以下單位名稱見於《華嚴經》和《大寶積經》等佛經中。如果把這裡的小數位數與大數位數對應起來,億分位對應億位,億分位以下是萬萬進位,億以上也同樣是萬萬進位。朱氏又於億、兆、京、垓、秭、壤、溝、澗、正、載之上,添加極、恒河沙、阿僧衹、那由他、不可思議、無量數,六個大數名目,都是萬萬進位制。南宋秦九韶《數書九章》也記載了與朱世傑類似的小數名稱,進位制也相同。這是沿用了甄鸞的進位制,如果甄鸞的進位法完全是中國自己的,大、小數單位都應用漢字表示,後人也不必借用佛經大數名稱來表示大、小數了。

《詩經》有大數名稱億和秭,如伐檀篇的"三百億",豐年篇"萬億及秭"。毛萇注釋爲"萬萬曰億","數億至億曰秭"。鄭玄則注釋爲"十萬曰億","萬億及秭,以言谷數多也"。甄鸞應用上、中、下三數法,説:"鄭用下數,毛用中數"。解釋"萬億及秭"時,他説:"宜云數億至垓曰秭",用了萬萬進位制。我們可以推測,甄鸞引入佛經萬萬進位和倍進位制,而將佛經名稱換爲漢語名稱,就象明清時將西方字母換爲漢字一樣。

3. 長度和體積的計算。

在注解《論語》千乘之國時,甄鸞用開方法求出方形土地的邊長。已知方形千乘之國面積爲90億方步,又1里=300步。他計算出邊長。

$$\sqrt{9000000000} = \sqrt{94868^2 + 62576} = 94868\frac{62576}{2\times 94868+1}$$

$$=94868\frac{62576}{189736}\text{步} = 316\text{里}\,68\frac{62576}{189736}\text{步}$$

顯然用到開方近似公式 $\sqrt{a^2+r} \doteq a+\frac{r}{2a+1}$,且開方計算和《九章算術》開方法相同。

對《周官·考工記》車蓋法,鄭玄説:"二尺爲勾,四尺爲弦,求其股。股十二,開方除之,面三尺幾半。"甄鸞作了如下計算來解釋:

$$\sqrt{4^2-2^2} = \sqrt{12} = \sqrt{3^2+3} = 3+\frac{3}{2\times 3+1} = 3\frac{3}{7} \doteq 3.43$$

而 $\sqrt{12}=3.43$ 即"面三尺幾半",同樣應用了上述近似公式。

《禮記》投壺法:"壺頸修七寸,腹修五寸,口徑二寸半,容斗五升。"鄭玄注云:"修,長也。腹容斗五升,三分益一,則爲二斗,得圓囷之象,積三百二十四寸。以腹修五寸約之,所得求其圓周。圓周二尺七寸有奇,是爲腹徑九寸有餘。"就是圓柱體積求其底面直徑,甄鸞按:

1 斛 $=16.2\times10^2=1620$ 寸^3,1 斗 $=162$ 寸^3,則 2 斗 $=324$ 寸^3,$S=324/5=64.8$ 寸^2 爲底面。

$$\text{圓周}\ C = \sqrt{12S} = \sqrt{777.6} = \sqrt{27^2+48.6}$$

$$= 27+\frac{48.6}{27\times 2+1} = 27\frac{48.6}{55}\ \text{寸。}$$

直徑 $d=\frac{C}{\pi}=\frac{1}{3}\times 27\frac{48.6}{55}=9\frac{16.2}{55}=9\frac{162}{550}=9\frac{81}{275}$。其中圓柱體積 $V=SXh$,$S=\frac{C^2}{12}$,$C=3d$。開方都用近似數值,如 $\pi=3$。

4. **關於等比數列。**

《儀禮》喪服絰帶法說："齊衰之絰，斬衰之帶也，去五分一以爲帶。大功之絰，齊衰之帶也，去五分一以爲帶。小功之絰，大功之帶也，去五分一以爲帶。緦麻之絰，小功之帶也，去五分一以爲帶。"鄭玄以斬衰的絰長爲9寸。甄鸞將問題歸結爲，"今有五服之絰，迭相差減五分之一，其斬衰之絰九寸，問齊衰、大功、小功、緦麻之絰各幾何?"他的解法是"五分減一者，以四乘之，以五除之。置斬衰之絰九寸，以四乘之得三十六爲絰實，以五除之得齊衰之絰，七寸、五分寸之一。……"用現在記法，a(1)、a(2)、a(3)、a(4)、a(5)分別表示斬衰、齊衰、大功、小功、緦麻的絰長。

已知　$a(1)=9,\quad a(i+1)=4/5\times a(i),$

則　　$a(2)=9\times(4/5),\quad a(3)=9\times(4/5)^2,\quad a(4)=9\times(4/5)^3,\quad a(5)=9\times(4/5)^4$

即是已知等比數列的首項和公比，求出通項。

與此相比，《九章算術》和《孫子算經》有同樣的題目表示等比數列的應用。如《九章算術》衰分章第四題："今有女善織，日自倍，五日織五尺，問日織幾何。"用衰分公式：

$$x(k)=\frac{a(k)\times A}{\sum A(k)},(k=1,2,\cdots,n)$$

其中A是總和，a(k)是列衰，x(k)是所求通項。也即已知等比數列總和、公比求出通項。

《五經算術》和《九章算術》都有等比數列通項公式，但已知條件不同。

5. **關於音律的研究。**

《五經算術》卷下用了很多篇幅論述了十二律和京房六十律，甄鸞用管子的三分損益法計算了《禮記》月令的十二律管長度，又計算了京房六十律管長。歷代正樂的標準器，以竹管爲重，以管定律時，音的清濁以管長短爲度。形成標準十二律，稱爲雅樂，先依律調鐘磬。《周禮·典同》云："凡爲樂器，以十有二律爲之數度，以十有二聲爲之齊量。"《大戴禮》曾子天圓篇云："聖人截十二管，以宗八音之上下清濁，謂之律。"孔子在《論語》中也談及十二管律，即黃鐘，大呂，太簇，夾鐘，姑洗，中呂，蕤賓，林鐘，夷則，南呂，無射，應鐘。

定律法即三分損益法，首見於管子(? —前645)，他在春秋時代考察舊制，傷心樂壞，纔從旋宮古法或黃帝古律中悟出此法。三分損益法，以一爲主，分作三分後，去一分爲$\frac{2}{3}$，加一分爲$\frac{4}{3}$，用作定律的要素，稱爲"管子法"。呂不韋(? —前235)利用管子的要素，以先下後上法，順次定出十二律，呂氏從黃鐘起，改作先下後上，先以$\frac{2}{3}$下生，次以$\frac{4}{3}$上生，從蕤賓起，仍照管子的先上後下法，進行至中呂。則應鐘生蕤賓，蕤賓生大呂，都是上生，叫做"蕤賓重上說"。由此生出十二律，叫做中國簡律，或簡律，統屬於管子音制。《呂氏春秋·季夏記》音律云："黃鐘生林鐘、林鐘生太簇、太簇生南呂、南呂生姑洗、姑洗生應鐘、應鐘生蕤賓、蕤賓生大呂、大呂生夷則、夷則生夾鐘、夾鐘生無射、無射生中呂。黃鐘、大呂、太簇、夾鐘、姑洗、中呂、蕤賓爲上。林鐘、夷則、南呂、無射、應鐘爲下。"簡律將一個八度分爲十二個不完全相等的半音，從黃鐘開始隔八相生，形成從低到高的依次爲十二律，黃鐘、大呂、太簇、夾鐘、如洗、仲呂、蕤賓、林鐘、夷則、南呂、無射、應鐘。奇數各律稱"六律"，偶數各律稱"六呂"。由於秦火以後，周代的樂譜蕩然無存，漢後的樂器不是舊制就是外來的。漢代研究經史者也研究樂律，以圖恢復周樂。比較著名的有：司

馬遷、淮南王劉安、劉歆、揚雄、班固、京房等。

淮南子(? 一前 122)用管子法與呂氏法定有十二律數,他說:"樂生於音,音生於律。"所謂音樂,無論建築在詩歌之上,或離開詩歌而獨奏,其本體的樂曲,總必有所依據的樂律。《淮南子·天文訓》云:"以三叁物,三三如九,故黃鐘之率九寸而宮音調,因而九之,九九八十一,故黃鐘之數立焉。十二各以三成,故置一而"一十一"三之,爲積分 177147。"黃鐘管長漢前未多見到,淮南子以 9 寸作爲黃鐘管長,以 $3^{11}=177147$ 作爲黃鐘大數,以定十二正律,他用三分損益上下相生法,隔八相生,完成中呂極不生說。詳見下表:

淮南子十二律數表[14]

辰　名	子	丑	寅	卯	辰	巳	午	未	申	酉	戌	亥
月　名	十一月	十二月	正月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月
律　名	黃	大	太	夾	姑	中	蕤	林	夷	南	無	應
音　名	宮		商		角		繆	徵		羽		和
律數	81	76	72	68	64	60	57	54	51	48	45	42
鄰律差		5	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3
管長(寸)	9	8.429	8.000	7.492	7.111	6.659	6.321	6.000	5.619	5.333	4.994	4.741

淮南子之後,人們採用這種十二律管長度。蔡邕(132—192)月令章云:"律者率也,清濁之管也",又云:"律者清濁之率法也,聲之清濁,以管子長短爲度。"參照"先依律調鐘磬,"可知諸樂所宗的編磬和編鐘,必是先調以管,使成一定之音,所以唐張文收吹竹管以調鐘、宋初用拱宸管以正樂,清便的排簫爲衆樂的綱領,可見古人以笛或管爲正樂之器,完全是從經驗得來。《史記》和《漢書》都採用十二律大數,黃鐘是 3^{11},各律的長度比以黃鐘爲 1,稱爲生鐘分,如林鐘生鐘分是 $\frac{2}{3}$,太簇是 $\frac{2\times4}{3^2}$,見下表

律名	黃	林	太	南	姑	應	蕤	大	夷	夾	無	中
生鐘分	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2\cdot4}{3^2}$	$\frac{2^2\cdot4}{3^3}$	$\frac{2^2\cdot4^2}{3^4}$	$\frac{2^3\cdot4^2}{3^5}$	$\frac{2^34^3}{3^6}$	$\frac{2^4\cdot4^3}{3^7}$	$\frac{2^44^4}{3^8}$	$\frac{2^54^4}{3^9}$	$\frac{2^54^5}{3^{10}}$	$\frac{2^64^5}{3^{11}}$
大數	3^{11}	$\frac{2}{3}\times3^{11}$	$\frac{2^3}{3^2}\times3^{11}$	2^43^8	2^63^7	2^73^6	2^93^5	$2^{10}3^4$	$2^{12}3^3$	$2^{13}3^2$	$2^{15}\cdot3$	2^{16}

上表顯然來自淮南子十二律法。律管長度有兩種尺制，黄帝尺和漢尺：1 漢尺＝$\frac{10}{9}$黄帝尺。淮南子使用漢尺制，而《史記・律書》律數章採用黄帝尺制，黄鐘管長漢尺 9 寸＝黄帝尺 8.1 寸。

律名	黄	大	太	夾	姑	仲	蕤	林	夷	南	無	應
音名	宮		角		羽	徵		角	商	徵		羽
管　長(寸)	$8\frac{1}{10}$	$7\frac{160}{300}$	$7\frac{2}{7}$	$6\frac{2}{15}$	$6\frac{4}{7}$	$5\frac{29}{30}$	$5\frac{19}{30}$	$5\frac{4}{7}$	$5\frac{7}{15}$	$4\frac{8}{7}$	$4\frac{7}{15}$	$4\frac{4}{15}$

象淮南子一樣，西漢定律法遵照《周禮・春官》以十二律數爲本。但是實際上，漢興百數十年，以律主月的旋宮之樂未見施行。由十二箇律生成黄鐘變律，京房(前 77—37)爲第 1 人，他依照淮南子十二律法，於元帝(前 48—33)之間作“六十律相生法”，把旋宮之樂由主月變爲主日，以圖恢復周代古樂，起於黄鐘終於南事，六十律如下表：[15](長度：寸)

I	律名	黄鐘	林鐘	太簇	南呂	姑洗	應鐘	蕤賓	大呂	夷則	夾鐘	無射	中呂
	長度	9.000	6.000	8.000	5.333	7.111	4.741	6.321	8.419	5.619	7.492	4.994	6.659
II	律名	執始	去滅	時息	結躬	變虞	遲內	盛變	分否	解形	開時	閉掩	南中
	長度	8.879	5.919	7.892	5.262	7.013	4.675	6.233	8.311	5.541	7.388	4.925	6.567
III	律名	丙盛	妥度	屈齊	嗇期	路時	未育	離宮	凌陰	去南	族嘉	鄰陰	內負
	長度	8.756	5.837	7.783	5.189	6.918	4.612	6.150	8.200	5.466	7.289	4.489	6.479
IV	律名	分動	歸嘉	隨期	未卯	形始	遲時	制時	少出	分積	昔南	期寶	物應
	長度	8.638	5.759	7.679	5.119	6.825	4.550	6.067	8.089	5.393	7.190	4.794	6.392
V	律名	質末	否與	形晉	夷汗	依行							
	長度	8.522	5.681	7.575	5.050	6.734							
VI	律名	色育	謙待	未知	白呂	南授	分烏	南事					
	長度	8.978	5.985	7.980	5.320	7.093	4.729	6.305					

甄鸞《五經算術》卷下云：“律管之法，隔八相生。子午已東爲上生，子午已西爲下生。上生者三分益一，下生者三分損一。益者四乘三除；損者二乘，三除。“其依據呂氏法以及淮南子法。他計算十二律數如下表：

律名	黄	大	太	夾	姑	中	蕤	林	夷	南	無	應
月名	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
管長(寸)	9	$8\frac{104}{243}$	8	$7\frac{1075}{2187}$	$7\frac{1}{9}$	$6\frac{12974}{19683}$	$6\frac{26}{81}$	6	$5\frac{451}{729}$	$5\frac{1}{3}$	$4\frac{6524}{6561}$	$4\frac{20}{27}$

《禮記・禮運》云：“五行之動迭相竭。五行、四時、十二月還相爲本。五聲、六律、十二管還相爲宮。五味、六和、十二食還相爲滑。五色、六章、十二衣還相爲質。”鄭注云：“竭猶負載也。言五行運轉，更相爲始。五聲，宮、商、角、徵、羽。其管陽曰律，陰曰呂。布在十二辰，始於黄鐘九寸。下生者三分去一，上生者三分益一。終於南呂。更相爲宮，凡六十律。”甄鸞將十二律更相

爲宮順列於下：

宮	黄	林	太	南	姑	應	蕤	大	夷	夾	無	中
徵	林	太	南	姑	應	蕤	大	夷	夾	無	中	黄
商	太	南	姑	應	蕤	大	夷	夾	無	中	黄	林
羽	南	姑	應	蕤	大	夷	夾	無	中	黄	林	太
角	姑	應	蕤	大	夷	夾	無	中	黄	林	太	南

甄鸞根據《禮記・禮運》的"始於黄鐘，終於南事"這句話、還有《後漢書》的司馬彪律曆志的京房六十律的記載，仿照京房六十律相生法，形成六十律起於黄鐘，終於南事如下：

律名	黄鐘	色育	執始	丙盛	分動	質末	大吕	分否	凌陰	少出	太簇	未知
辰名	子						丑				寅	
律數	177147	176777	174762	172410	170089	167800	165888	163655	161452	159280	157464	157135
管長（寸）	9	8.98	8.76	8.64	8.52	8.43	8.31	8.20	8.09	8	7.98	7.89
律名	時息	屈齊	隨期	形晉	夾鐘	開時	族嘉	爭南	姑洗	南授	變虞	路時
辰名					卯				辰			
律數	155344	153254	151191	149156	147456	145471	143513	141582	139968	139676	13[illegible]084	136225
管長	7.78	7.68	7.58	7.49	7.39	7.29	7.19	7.11	7.09	7.01	6.92	
律名	形始	依行	中吕	南中	内負	物應	蕤賓	南事	盛變	離宮	制時	林鐘
辰名			巳			午					未	
律數	134392	132583	131072	129308	127567	125850	124416	124156	122741	121089	119460	118098
管長	6.83	6.73	6.66	6.57	5.48	6.39	6.32	6.31	6.23	6.15	6.07	6
律名	謙待	去滅	安度	歸嘉	否與	夷則	解形	去南	分積	南吕	白吕	結躬
辰名					申					酉		
律數	117851	116508	114940	113393	111867	110592	109103	107635	106186	104976	104757	103[illegible]63
管長	5.99	5.92	5.84	5.76	5.68	5.62	5.54	5.46	5.39	5.33	5.32	5.26
律名	歸期	未卯	夷汗	無射	閉掩	鄰齊	期保	應鐘	分烏	遲内	未育	遲時
辰名				戌				亥				
律數	102169	100794	99437	98304	96981	95675	94388	93312	93117	92056	90817	89[illegible]95
管長	5.19	5.12	5.05	4.99	4.93	4.86	4.79	4.74	4.73	4.68	4.61	4.[illegible]5

同京房六十律相對照，它們基本上是一樣的。甄鸞有關音律的研究保留了淮南子十二律和京房六十律的原貌，對整理古代音律遺産作了有益的工作，對後世音律研究提供了資料。

《五經算術》有關度量衡的記載，如，1 斛＝100 斤＝120 升，1 溢＝20 兩＝$1\frac{1}{24}$升，1 斤＝16 兩，1 里＝300 步，1 畝＝100 步^2，1 步＝8 尺等。

北周崇尚儒教，爲儒家經典作注成風，甄鸞精通數學，爲儒家經典中有關的數學内容作注，

便撰《五經算術》。又由於他篤信佛教，撰《七曜算術》、《七曜本起曆》等，《五經算術》也受到佛教的間接影響。《五經算術》涉及範圍廣泛，在注經時進行較多的數學運算，唐、宋時收入《算經十書》，有較大的社會影響，後來又傳入了日本。

參考文獻

〔1〕《後漢書·鄭玄傳》。
〔2〕〔8〕《漢書·律曆志》。
〔3〕〔4〕《魏書·釋老志》。
〔5〕《後漢書·楚王英傳》。
〔6〕《後漢書·襄楷傳》。
〔7〕《高僧傳》。
〔9〕〔10〕〔11〕《北周書·武帝紀》。
〔12〕柳治徵：《中國文化史》，1983，中國大百科全書出版社，398頁。
〔13〕錢寶琮：《中國數學史》，1981，科學出版社，93頁。
〔14〕吳南薰：《律學會通》，1964，科學出版社，101頁。
〔15〕同〔14〕，118頁。

《謝察微算經》試探

李 迪　　馮立昇
（内蒙古師範大學科學史研究所）

《謝察微算經》這部算書，在中國數學史界并不陌生，可是人們對它的可靠性似乎不太放心，一些通史性的中國數學史著作大都連提都不提，僅在與珠算史有關的著述中有所涉及，同樣不敢展開論述。李儼在引用了其中幾句與珠算盤有關的話之後寫道："後此程大位曾引入算法統宗卷一，用字凡例内。所謂脊梁惟算盤有之。按謝察微算經：新唐書、宋史均作三卷，今已不全。無從考訂是否爲宋人遺著。説郛、唐宋叢書并作髀算算經，未審何故？"[1]他在另一處又説："無從斷定是否宋人作品，也不好作爲珠算起源的證據。"[2]梅榮照引用的内容與李儼相同，他説："《説郛》及《唐宋叢書》散錄的《謝察微算經》有描述珠算盤的一節：'中：算盤之中；上：脊梁之上又位之左；下：脊梁之下又位之右；脊：盤中横梁隔木'。後來程大位在《算法統宗》卷一'用字凡例'内也提到它。"但他又説兩部叢書"收錄的《謝察微算經》是放在《周髀算經》中，疑爲清代外行學者所加入"[3]。華印椿也摘錄了這段文字，并指出見於宋《謝察微算經》中"用字例義"的記載，并説"以上用字例義，只有珠算盤才適用"[4]。没有進一步説明。近年來，在一些辭書中不同程度地涉及到這部書或其作者謝察微。有的説"《古今圖書集成》中有一些片斷尚不知是否爲原書内容"[5]。還有，"謝察微，中國宋代人。著有《謝察微算經》3卷。"[6]等等。迄今尚無人進行專題研究，幾乎所有的引述者都含糊其詞，不敢放膽做爲可靠史料加以引用。本文試對《謝察微算經》做一較全面的探討。

一

在宋元時代成書的著作中有三處記載了《謝察微算經》或《謝察微發蒙算經》，它們是：《新唐書》："謝察微算經三卷"[7]；《通志》："謝察術算經三卷"[8]，這裏"術"字當爲微字之誤；《宋史》："謝察微發蒙算經三卷"[9]。另外在南宋版《張邱建算經》卷末"百鷄術"之後有"…今將算學教授并謝察微擬立術草，創新添入"一段。

在明代的目錄學著作中不載《謝察微算經》，而在明初陶宗儀編纂的叢書《説郛》中收有《算經》一篇，題"宋謝察微"[10]。現存的《謝察微算經》收在《説郛》的明刻重輯本之中，在書的目錄中漏掉了《謝察微算經》，但目錄中記有《周髀算經》一書，並題"趙爽注"，實際書中根本没有《周髀算經》的内容。又一説，收入《唐宋叢書》，並説誤爲"周髀算經，唐趙爽注"，但我們所見到的《唐宋叢書》，目錄中雖有這段文字，而書中卻未收入任何一部算經的内容，大概在有的版本中收入了《謝察微算經》。入清以後，它又被收入《古今圖書集成》第〇三四册"曆象彙編・曆法典・算法部匯考四"之中，經核對，與《説郛》本一字不差，顯然是來自《説郛》。《古今圖書集成》題

"宋謝察微算經",與《說郛》也相一致。

到了清末,馮澂、劉鐸、黄鍾駿在著作中都提到了《謝察微算經》一書,後來丁福保、周雲青有一綜合記述:"謝察微算經三卷,說郛卷八、唐宋叢書本、曆法典本。宋謝察微撰。今存者不足一卷。(馮)澂案:鄭樵通志載謝察微算經三卷、宋史藝文志作發蒙算經三卷。若說郛及唐宋叢書所載,俱作周髀算經,唐趙萇注,非也。通志略作謝察,無微字,有誤。[注]劉鐸古今算學書錄曰,按說郛及唐宋叢書二書目錄,俱作周髀算經唐趙萇注,不知因何致誤?宋史藝文志作發蒙算經三卷,今存者不足一卷,非全書也。按馮劉二說實同。黄鍾駿疇人傳四編謝察微傳亦引宋史藝文志及玉海,謝察微撰發蒙算經三卷。"[11]查《疇人傳四編》是把謝察微等三人列在一起,且未加分别地加了引用書目《唐書·藝文志》、《宋史·藝文志》和《玉海》[12]。實際上,《玉海》中并未記載《謝察微算經》一書。

爲了討論方便起見,我們把《說郛》所載的宋謝察微的《算經》全文錄於下:

大數

一[大數之始也]①　十[十個一爲十]　百[十個十爲百]　千[十個百爲千]　萬[十千爲萬,數之成也]　十萬　百萬　千萬　億[萬萬曰億]　十億　百億　千億　萬億　十萬億　百萬億　千萬億　兆[萬萬億]　京[萬萬兆]　垓[萬萬京]　秭[萬萬垓]

小數

分[十厘爲分]　厘[十毫]　毫[十絲]　絲[十忽]　忽[十微]　微[十纖]　纖[十沙]　沙[埃塵]　塵[埃渺]

度

丈[十尺]　尺[十寸]　寸[十分]　分[十厘]　厘　毫　絲　忽[已上同前]　匹[四丈,今無定制]　端[五丈,今亦不一]②

量

石[十斗]　斗[十升]　升[十合]　合[十勺]　勺[十抄]　抄[十撮]　撮[十圭]　圭[六粟]　粟[即一粒之粟也]　斛[古一石,今五斗,或二斗五升]　釜[六斗四升]　庾[十六斗]　秉[十六斛]

衡

斤[十六兩]　兩[二十四銖]　銖[十累]　累[十黍]　黍[禾方得而有準]　秤[原十五斤,今二十斤或三十斤]　鈞[二秤]　石[四鈞]　引[二百斤]　〇[今兩之下惟用錢分厘毫絲忽也]

畝

畝[横一步,直二百四十步,即闊十丈,長六十丈也]　〇[若以自方五尺計之,積六千尺也]　步[方五尺也]　分[五寸]　厘[半寸]　毫　絲　忽　里[三百六十步]　〇[計一百八十丈,約人行一千步]　頃[今以百畝爲頃]　〇[頃畝者乃積税之總也。二十四步爲一分,十分爲畝。畝之以下曰厘毫絲忽]　角[一畝分爲四角,每角六十步也]

① 爲排版方便,把雙行小注改用方括號予以區别。
② 有的本上脱"一"字。

九章名義

一曰方田[以御田疇界域]　二曰粟布[以御交貨變易]　三曰衰分[以御貴賤廪稅]
四曰少廣[以御積羃方圓]　五曰商功[以御功程積實]　六曰均輸[以御遠近勞費]
七曰盈朒[以御隱雜互見]　八曰方程[以御雜揉正負]　九曰勾股[以御高深廣遠]

用字例義

法[禁數也]　實[本數也]　因[法之單位者又由也]　歸[人已之數也]　加[增添也]　減[除少也]　乘[法之多位者]　歸[先歸後除命名也]　除[減少也]　積[乘成之數也]　乘[法實合變數也]　如[九數用此下一位也]　身[本位也]　則[法也]　左[上邊大位也]　右[下邊小位也]　縱[直長也]　横[廣闊也]　廣[横闊也]　闊[横廣也]　直[長也]　面[方面也]　高[立起也]　深[陷下也]　倍[加上本數也]　并[二數相合]　截[割斷也]　分[撥開也]　原[初數也]　差[多少不同數也]　通[會同其數]　變[改換其數]　約[量度也]　中[算盤之中]　進[移上前一位]　逢[遇有數而言逢]　上[脊梁之上，又位之左]　下[脊梁之下，又位之右]　挨[隨身變數也]　退[移下後一位]　勾[闊也]　股[長也]　斜[兩隅相去又不正也]　弦[勾股斜曰弦，弧矢亦有弦]　隅[曲角也]　長[直也]　周[外圍也]　較[相減余也]　廉[方直也]　方[四面同數]　徑[周中之弦]　脊[盤中横梁隔木]　列位[各置位次]　折半[減去一半]　還原[復舊數也]　商除[心與意商量而除之也]　相乘[長寬或銀貨也]　自乘[法實數同相乘]　再乘[自乘之而又乘]　遍乘[先以一法遍乘諸數]　商總[合用商開之法於盤中]　開方[自乘還原也]　開立[即自乘再自乘之還原]　中實[即商總也]　率[如一二三四五并得十五數也]　得令[斤兩貫個石等類也]　得術[乃法首位每下該得之名]　互乘[如四處數目上下斜角相乘]　相減[如二數以少減多，余曰較]　合得[算數定奪]　維乘[四處顛倒相乘]　若干[一爲數始，十爲數終，未算難定]　幾何[與若干相同]

二

根據本文開頭所引述的各項資料來看，研究者一般都認爲《謝察微算經》是宋代人所作。但宋代，從北宋初到南宋末有320年，到底是南宋還是北宋，能否再具休些呢？抑或早於北宋或晚於南宋？我們認爲是可能的。

《謝察微算經》是否已經刊刻，没有任何記載談到此事。其流傳較廣的時代是南北宋之間。鄭樵(1103—1162)是南宋初人，在其著作中録入了此書。又如，朝鮮國高麗"仁宗十四年十一月制，……凡明算業式，貼經二日，内，初日貼《九章》十條，翌日貼《綴術》四條，《三開》三條，《謝家》三條。"[13]其中仁宗十四年相當於1136年，《謝家》無疑應爲《謝察微算經》。既然在1136年，《謝察微算經》已被列爲朝鮮的考試用書，肯定在這之前必已傳入該國。當時中朝兩國關係密切，往來很多，中國在圖書出口方面對朝鮮没有限制，北宋末曾禁止陰陽、曆算、兵書等輸入越南，而對朝鮮則未有此禁例[14]。由此可以推知，《謝察微算經》至遲在南北宋之交已傳到朝鮮，它的存在一定比這還要早。

特别重要的是《新唐書》已經記載了《謝察微算經》，而《新唐書》是歐陽修(1007—1072)於

1060 年完成，所記載的圖書基本上都是唐或以前的。退一步來說，歐陽修顯然是把《謝察微算經》看做是較早的作品，或不是宋代人所作，於是列入《新唐書》中。

在南宋嘉定六年(1213)刊的《張邱建算經》中所記"今將算學教授并謝察微擬立術草"一語，錢寶琮認爲"并"字系衍文，而册去[15]。因而有"算學教授謝察微"，我們同意這一校訂，只有這樣文理纔順，纔有道理。教授之稱起於北宋初，開始時是指給皇室子孫進行教學的職務名稱，是在至道初(995)根據中書省的建議設置的，後來"凡諸宮皆有教授，初無定員"[16]。到仁宗時，教授之設已非常普遍，慶曆四年(1044)"詔諸路州、軍、監各令立學，學者二百人以上，許更置縣學。自是州郡無不有學。始置教授，以經術行義訓導諸生，掌其課試之事，而糾正不如規者"[17]。仁宗在詔書中特別規定"其令州若縣皆立學，本道使者選部屬官爲教授，員不足，取於鄉里宿學有道業者"[18]。神宗時，律學、醫學等等學科都設有教授，茲不詳舉。就是說，從北宋初起，教授之稱逐漸擴大，以致達到很普遍的程度。

在上面抄錄的《謝察微算經》中，有幾處很值得注意，它們是：

匹[四丈，今無定制]。

端[五丈，今亦不一]。

斛[古一石，今五斗或二斗五升]。

引[二百斤]。

頃[今以百畝爲頃]

角[一畝分爲四角，每角六十步也]。

查宋王朝建立之初，對於度量衡有明確規定："宋既平定四方，凡新邦悉頒度量於其境，其僞俗尺度逾於法制者去之"。趙匡胤一即位便於建隆元年(960)八月，"詔有司按前代舊式作新權衡，以頒天下，禁私造者。"乾德(963—968)中，"又禁民間造者。由是尺之制盡復古焉。"到景德(1004—1007)中，劉承圭參加校定，完全按照古制建立了度量衡制度，"權衡之制益爲精備。"[19]由此可見，宋代的度量衡，特別是北宋，全國是統一的，進位制、單位名稱等都與古代一致。不存在混亂現象。

在《謝察微算經》中除上面摘出來的幾條外，都與宋代度量衡符合，也與《孫子算經》等所載一致。混亂現象肯定出在五代時期(907—960)，而不會在此之前的唐代。北宋一建立就提出的"僞俗尺度"問題，顯然是指建國以前的五代。但是，五代時期的度量衡情況，缺少記載，詳細情形不得而知。就《謝察微算經》的作者謝察微來說，他仍把傳統的制度作爲主要的，而把改變了的只加以聲明，因爲"無定制"或是有兩種單位，所以無法遵循。

還有關於"角"這個地積單位，以前未見記載，規定是一畝的四分之一，即 60 平方步。至於它起於何時，更無從談起。在南宋秦九韶(1209？—？)的《數書九章》卷九"復邑修賦"一題中用到"角"，雖然未說"角法六十步"，但是肯定是六十平方步。實際上，這個單位是多余的，必然被廢棄。還有"釜"、"庾"、"秉"等單位，古代都有，並且與《謝察微算經》的進位制都相同[20]，後來也無人提及。

根據上述各項資料來看，謝察微的生活時代應在五代到北宋前期的約一百年間。我們推測：謝察微是在五代末期寫成了《算經》一書，可是他到北宋初，還在某宮中當過教授，活了七八十歲。活到這個年齡的人，當時也大有人在。他并不是當了教授才寫出《算經》的，而是他當了教授以後，把這兩者聯係在一起，就象現在某人當講師時出版了一本書，後來這人當了教授就

說某某教授寫過什麼書一樣。

歐陽修爲什麼把這書收入《新唐書》？前面已經說過，至少他認爲是時間比較早的著作。可是，實際上可能還有更直接的原因，那就是在他之前由薛居正(912—981)主编的《五代史》(即《舊五代史》)中没有"藝文志"，他自己主编的《新五代史》也没有"藝文志"。這樣，把五代時期的著作在《新唐書》中予以著錄，是很自然的事，否則就難以理解了。

三

現在來討論《謝察微算經》本身的問題。

前面提到的有兩個書名，即《謝察微算經》和《謝察微發蒙算經》，都是三卷。我們認爲這是一部書，絶不是兩部。《新唐書》和《宋史》所記，"謝察微"三字不是書名的一部分，而是作者與書名相連，書的原名應爲《發蒙算經》，作者爲謝察微，這是十分清楚的。《發蒙算經》一書，在元代還存在，到陶宗儀编纂《説郛》時只收錄了其中的一小部分，是他故意這樣摘錄的，還是其他部分當時已散佚？不好做出結論。本文爲了照顧習慣，仍稱爲《謝察微算經》，是"入鄉隨俗"的做法，是不得已而爲之的。

從《説郛》等保留下來的内容來看，都非常淺顯，從大小數的進位開始，進而講到度量衡、田畝制度，最後到"用字例義"等，全都俱有發蒙的性質，連加、減、乘、除等都給予定義性的解釋，對於俱有一定數學知識的人(更不用説專家了)是不必要的、多餘的，對那些不懂數學的人就很合適。由此推知，這部分内容無疑來自《發蒙算經》。

《發蒙算經》三卷，上述内容顯然是第一卷的開頭部分，散佚了兩卷多。全書的結構形式，可能類似於《孫子算經》、《張邱建算經》和《夏侯陽算經》，三卷是按上、中、下编序，而不是用一、二、三。散佚的部分，不會越出當時算書的體例，應當是一些問題，形式也是題、答、術，也可能有草。題目大體分爲若干類，如四則運算、田畝計算、開方、租税、勾股、土木工程，還可能有一些較難的算題或雜題，肯定包括一些古書上的題目，《張邱建算經》卷下的"百鷄"問題就是一例。

在《發蒙算經》中除引錄前人的著作外，也包括謝察微本人的研究結果，其中之一是對"百鷄"問題所立的"術草"，爲使資料集中起見，現將其摘錄於下：

> "其術曰：置錢一百在地，以九爲法，除之，[以九除之。既雛三直錢一則是每雛直三分錢之一。宜以鷄翁、母各三因，并之得九。]得鷄母之數。不盡者返減下法，爲鷄翁之數。别列鷄都數一百隻在地，減去鷄翁、母數，餘即鷄雛。得合前問。若鷄翁每增四，鷄母每減七，鷄雛每益三。或鷄翁每減四，鷄母每增七，鷄雛每損三。即各得又答之數。
>
> "草曰：置錢一百文在地，爲實。又置鷄翁一，鷄母一，各以鷄雛三因之，鷄翁得三，鷄母得三。并鷄雛三并之，共得九爲法。除實，得一十一爲鷄母數，不盡一，返減下法九，餘八爲鷄翁數。别列鷄都數一百隻在地，減去鷄翁八，鷄母一十一，餘八十一爲鷄雛數。置鷄翁八以五因之，得四十，即鷄翁直錢。又置鷄母一十一，以三因之，得三十三，即鷄母直(錢)。又置鷄雛八十一，以三除之，得二十七，即鷄雛直(錢)。合前問。"
>
> "又草曰：置鷄翁八增四得一十二，鷄母一十一減七得四，鷄雛八十一益三得八十四，得百鷄之數。如前求之，得百錢之數。亦合前問。"

"又草曰:置鷄翁八減四得四,鷄母一十一增七得一十八,鷄雛八十一損三得七十八。如前求之,各得百鷄百錢之數。亦合前問。"

這段文字,雖然給"百鷄術"增添了新的資料,但是正如錢寶琮所說:"謝察微的解題方法顯然是不合理的。"[21]實際上,謝察微在"術"和"草"中,并没有給出正確的解題法則,而是湊出來的答案。

在"百鷄"問題中,從張邱建開始就暗中使用了一組特解:鷄翁爲0,鷄母爲25,鷄雛爲75。謝察微也是這樣做的,在特解上試着分别加減4、7和3,先湊出100隻鷄,然後再乘錢數,如其和也是100,鷄數就是所求,同樣未明確提到特解的問題。他在"術"和"草"中所説的"法"、"實"等做法没有根據。

謝察微在數學上是有貢獻的,至少有以下三方面值得提出。

第一,在度量衡中,度、衡的小數和地畝的小數,採用統一的單位名稱,即分、厘、毫、絲、忽,全用十進制。至於容積,在歷史上一直有一套單位名稱,按規定最小的單位是一粒標準的粟,無再小者。謝察微的作法,可能受到《夏侯陽算經》的影響,該書講到長度、重量和容積時都説"皆十上之",在講了里法步法之後,有一句總結性的話:"厘、毫、絲、忽,可以意知"。[22]貨幣也是採用同樣單位名稱。不過在長度和貨幣之外,未見實際應用。謝察微在此基礎上都做了明確的規定,爲後人制訂度量衡單位制度提供了方便。北宋劉承圭所定重量的十進制系統,應來源於謝察微的《發蒙算經》。有人認爲,"置石爲十斗,以補斛名之缺,其法乃始於宋。"[23]此説不確。

在《發蒙算經》中還把一些大單位名稱進行了移植,如"引"原是長度單位,而此書卻移到了重量上,規定200斤爲1引。又如把原是重量單位的石,推廣到了容積,規定10斗爲1石,與傳統的斛一致,不過他保留了斛,并且多少斗爲1斛已很混亂,用石做容積單位還見於"敦煌算書"中的《立成算經》,所記"六粟爲圭,六十粟爲撮,六百粟爲抄,六千粟爲勺,六萬粟爲合,六(十)① 萬粟爲(升),六百萬粟爲百升,六(千萬)粟爲石。"[24]在編號S② 0663(4)算經中也用石做爲容積單位,如"七百二十一石三斗九升九合"等等[25]。其他編號的算術中同樣有用到石的例子。"敦煌算書"大都是唐、五代時期的手抄本,……有的可能追溯到隋代至北朝。[26]我們取下限爲五代時期,可見當時把石做爲容積單位已很普遍,斛便被廢棄。由此,再一次説明《發蒙算經》系五代作品。

在度量衡方面,《發蒙算經》還直接引用了《夏侯陽算經》的某些内容,如"諸度地以五尺爲一步,三百六十步爲一里。""諸田廣一步,長二百四十步爲畝。畝百爲頃。[此今用之。]"[27]只要對照一下即可發現,兩者本質上完全相同。

第二,"用字例義"是對73個數學術語或常用字、詞從數學的角度給出了定義性的簡短説明,有的同一術語有不同意義時分開定義,如"歸"有兩個,一是"入己之數也",一是"先歸後除,合名也",這就是歸除的歸。又如"乘"也有兩個字,還有一些定義很有意思,如"身",在早期的數學著作中很少用到,南宋楊輝使用得較多,謝察微的定義是"本位也",楊輝把求數叫"連身加",也有本位的含義。對於容易混淆的詞,從定義上可分别開來,如"差"與"較","除"與"商除"等等。

在九章名義中,把"粟米"改爲"粟布","盈不足"改爲"盈朒",似從謝察微起,被後來許多人

---

① 括號中的字原脱,系李儼所補,下同。
② S係斯坦因(Sir M. A. Stein,1862—1943)之縮簡,他把大批敦煌文物盜往英國。

所採用。

第三，首次明確記載了珠算。在"用字例義"中，從"中"、"上"、"下"，"脊"等詞的定義"算盤之中"，"脊梁之上，又位之左"、"脊梁之下，又位之右"、"盤中橫梁隔木"來看，衹能是珠算。這里已經用到了"算盤"一詞，它不是籌算盤，因爲籌算不需要橫梁隔木（脊），而是把算籌按參加運算的兩數排在平面板或幾上，再加上計算結果，一般要三層。對於"上"、"下"的解釋都是各有兩個含義：一是算珠在脊梁之上、下，一是珠在左、右，從位置看，左珠代表高位爲上，右珠代表低位爲下。目前，珠算史研究者公認這些詞是指珠算。我們對此，同樣不加懷疑。

但是，我們和所有論者不同的是，把《發蒙算經》定爲五代時期的作品，並且認爲殘留下來的文字爲原文，沒有經過後人纂改，或增添內容，因而得到五代時期已有珠算的看法。現在已有越來越多的證據證明，宋代出現了珠算，研究者也多趨向於承認珠算發明於宋代，有的推到北宋。華印椿也把《謝察微算經》做爲算盤起源於宋代說的論據加以引用，但未說是南宋還是北宋。

五代時期，籌算還占統治地位，人們計算時大都使用算籌。珠算只能在民間流傳，不能登大雅之堂。《發蒙算經》是面向民間的啓蒙之作，記載了流傳民間的珠算是符合這部書的性質的。

不少研究者都提到了《謝察微算經》與《算法統宗》的關係。實際上，後者幾乎一字不漏地全部照錄了前面我們引錄的文字，僅在"忽"下的注"已上同前"、去掉了"已上"二字。甚至於把畫圓圈"○"的地方也照樣畫上"○"。根據這事實來看，程大位是抄自《說郛》的《算經》，而《算法統宗》做爲珠算專書，如此重視這部書，就從側面證明其中的一些內容俱有珠算性質。

總之，《謝察微算經》雖然大部分內容已經散佚，但是從保存下的殘文來看還是很有價值的，其中包括了最早的珠算史料，因此我們把珠算的起源定爲五代時期。書中對度量衡制度的研究，對一些術語的定義等，都對後世產生了深遠的影響。

參考文獻

[1] 李儼："珠算制度考"，《中算史論叢》第四集，1955，科學出版社，第 21－22 頁。

[2] 李儼：《中國數學大綱》下册，1958，科學出版社，第 315 頁。

[3] 梅榮照："唐中期到元末的實用算術"，《宋元數學史論文集》，1966，科學出版社，第 10－35 頁。

[4] 華印椿：《中國珠算史稿》，1987，中國財政經濟出版社，第 33 頁。

[5] 華印椿、李培業：《中華珠算大辭典》，1990，安徽教育出版社，第 451 頁。

[6] 鄧宗琦主编：《數學家辭典》，1990，湖北教育出版社，第 780 頁。

[7]《新唐書》卷 59"藝文志三"。

[8] 鄭樵：《通志》卷 68"藝文志"。

[9]《宋史》卷 206"藝文志六"。

[10]《說郛》弖 108。

[11] 丁福保、周雲清：《四部總錄算法编》，1957，商務印書館，第六七集，序號 327。

[12] 黄鍾駿：《疇人傳四编》卷 4"謝察微、魯靖、黄棲岩"。

[13] 鄭麟趾：《高麗史》卷 74"選舉二・學校"。

[14] 李儼:"從中國算學史上看中朝文化交流",《中算史論叢》第五集,1955,科學出版社,第187－191頁。
[15] 錢寶琮校點:《算經十書》本《張丘建算經》卷下之末。
[16]《宋史》卷162"職官二"。
[17]《宋史》卷167"職官七"。
[18]《宋史》卷157"選舉三"。
[19]《宋史》卷68"律曆一"。
[20] 曾昭安:《中外數學史》第一編上册,1956,武漢大學,第82頁。
[21] 錢寶琮:"張邱建算經提要",載其校點《算經十書》,下册,第327頁。
[22]《夏侯陽算經》卷上"明乘除法"。
[23] 吳承洛:《中國度量衡史》,1984,上海書店復印商務印書館1937年版,第238頁。
[24] 李儼:《中國古代數學史料》,1954,中國科學圖書儀器公司,第37頁。
[25][26] 王進玉:"敦煌遺書中的數學史料及其研究",《數學史研究文集》第二輯,1991.內蒙古大學出版社,(臺灣)九章出版社,第58－65頁。
[27]《夏侯陽算經》卷上"論步數不等"。

最早的蒙文三角學著作——八綫表

斯 登　蘇瓦迪　薩仁圖雅
（内蒙古民族師範學院數學系）

康熙五十年（1711 年）刊印的八綫表，即割圓八綫，是一部數學著作，是《天文原理》一書中的一卷。所謂八綫是指三角學中的正弦、餘弦，正切，餘切，正割，餘割，正矢和餘矢八種三角函數綫。迄今國内未曾有人研究過本題目，本文擬就以下五個方面進行探討：(1) 割圓八綫；(2) 例題兩種計算；(3) 利用表求相應函數值；(4) 題外八種計算；(5) 用八綫表求直角三角形的勾、股和弦等。八綫表原屬於西洋三角學，1631 年左右首次輸入中國，於 1711 年由漢文譯成蒙文，又 1715 年由蒙文譯成藏文。

下面我們着重討論八綫表的來歷，八綫表的内容以及在天文曆法史上蒙古族學者應用八綫表的概況。

一 八綫表的來歷

八綫表是《康熙御制蒙語文天文原理》（簡稱《天文原理》）一書的一卷。要了解八綫表的來歷，首先要了解《天文原理》的成書過程。該書木刻版，（維）蒙文成書於公元 1711 年，全書共五函，三十六卷，1583 頁；1990 年由内蒙古科學技術出版社再版，斯登等人校注，1104 頁，1116 千字。各函的内容有：

第一函：序言一卷，日躔二卷，月離四卷。

第二函：五星表一卷，五緯表一卷。

第三函：交食表九卷。

第四函：（増）交食表共九卷。增表來源圖説一卷。

第五函：天文步天歌三卷，八綫表一卷，凌犯表一卷，儀象表一卷，新七政細草一卷，交食細草一卷。

該書的序言中列出參加編譯人員名單，其中有藏蒙事内府御前侍衛拉西，藏文學校教習官扎薩克喇嘛丹金格隆，蒙曆法師巴赫，蒙譯師敖期爾，漢曆法師何國宗，劉玉思等 36 人。這些人在清朝政府中都有職務和學位職稱。

該書在題爲《漢曆蒙譯》序言中寫道：

“至於漢地，朝代多次更迭，非僅一姓。在二十二代王朝之前便有曆法，自是以後，曆法有七十二家之多，雖皆系計算日、月、曜、星的運行周期之理，但都不是精確無誤，明白無遺。

在西藏有純内道的體系派的曆算，也有内道與外道合參的作用派曆算法，這兩種曆法雖然源遠流長，但是精確地推算日、月食的時刻時，没有把地理位置之高低，日月出没時刻的因素都

考慮在内，這就給曆算的精確計算造成了困難。我們蒙古族如果僅從藏地翻譯引進曆算，就無法克服計算上的困難。

文殊師利護之下的漢地則已將一切曆象典籍之精華集中起來，剔除不明確之處，增加新的内容，將各地不同地理位置高低之觀測法，及有關日、月、曜、星的各種行度、全部明確無誤地展示出來了。因此，爲了精曆算，彰百家，益算者，聖文殊師利康熙皇帝召諭將此前所未有的曆算典籍之精本重新用漢文編寫，再用蒙文翻譯刊刻。謹遵聖命，我等將文殊師利天子曆算新編中計算日、月、曜、星之時刻，地理位置之高低之精確數據及其圖説以及學習，使用曆法必需之典籍都譯成了蒙文並刊刻木板"。

從序言中看出，當時蒙古族用藏曆，藏曆也同樣遇到精確度不高與天象不符合的問題。蒙古族想改革曆法，提高曆法精度，尋找一個先進曆法，正在這時候康熙帝御制《天文原理》一書，向蒙古族傳播了當時的先進曆法——時憲曆。

中國歷史上實行最長的曆法，是元代王恂和郭守敬制定的"授時曆"，先後使用 360 多年。它比以前的各種曆法都精確，但仍有細微的誤差，這些誤差經過 300 多年的積累就形成了較大的數值，影響到推算日、月食的精確性，到明朝末年就很清楚地意識到重新修改曆法的必要性。這時西洋耶穌會傳教士來到中國，帶來了十六世紀末歐洲的天文曆算。其科學性已經超過了十三世紀的授時曆水平。於是以徐光啓爲首的一批中國學者學習這一曆法，於 1635 年製訂出新曆法 137 卷，取名爲《崇禎曆書》，並刻版，還没來得及頒行明朝滅亡。《崇禎曆書》引入了平面和球面三角學，採用了比較準確的計算公式，簡化了計算手續。把歐洲的一整套天文學上的度量制度引入了中國天文學。從此以後，中國天文學便逐漸與世界天文學融合起來。1644 年清朝在北京建立政權，參加過崇禎曆書編寫工作的德國傳教士湯若望把這部書稍加删改，壓縮成 103 卷，更名爲《西洋新法曆書》獻給了清廷，并以此編訂了新曆法，取名爲《時憲曆》，並於 1641 年頒行。時憲曆通稱農曆，1645 —— 1911 年共使用 260 多年。

《西洋新法曆書》於 1669 年重編卷次爲 100 卷，並改名爲《新法算書》。1661 年康熙即位，他對數學和天文學有濃厚興趣，而且系統學習過，到晚年曾組織我國天文學者重新修定《新法算書》，於 1711 年又從事御制《蒙文天文原理》的工作，他 1722 年去世。《天文原理》的有些内容來自《新法算書》，採納了其實踐部分，省略了原理部分，八綫表是相當於《新法算書》中的卷 81 和 82。

蒙古族通過漢文而得到 16 世紀的先進曆法時憲曆和曆算，同時又引進了天文曆法和先進數學工具西洋三角學——八綫。

"西洋的球面三角術和平面三角術，一同於崇禎辛未(1631 年)輸入中國。到明末耶穌會士始輸入三角函數表。明、崇禎四年(1631)正月 28 日呈進割圓八綫表 6 卷和測量全義 10 卷，就中割圓八綫表，是半象限的三角函數表，小數五位，每分有數，秒以下比例算得。其次序先正弦綫，次正切綫，次正割綫，次餘弦綫，次餘切綫，次餘割綫，如表(2)。這份表的説明及表同《天文原理》中的八綫表吻合。

二　八綫表的内容

《天文原理》中所涉及到有關數學問題，包括空間圖形的性質和與天體運動相聯繫的各種

計算問題，有直角三角形與鈍角三角形的解法；三角函數與三角函數表的應用；球面三角形的解法等問題。八綫中沒有外文字母、外來符號以及運算符號、表格中的數字是用蒙古“朱爾海”數碼，即和早期的印度—阿拉伯數碼相似的數碼，這樣表顯得一目瞭然。表中沒有小數點，其數都是以整數形式出現的，八綫表的內容可分爲以下五個部分：

1. 割圓八綫表，這是關於三角函數、三角函數表和關於三角圓的半徑問題。這裏有圖象給出八綫定義：所謂八綫是與一個角有關的八條綫段分別叫做正弦、餘弦、正切、餘切、正割、餘割、正矢、餘矢。

由表給出這些三角函數的值，這裡三角圓的半徑 $r=100000$ 而 $r\neq1$。因此，表中的數都以整數形式出現的。參看八綫全圖。

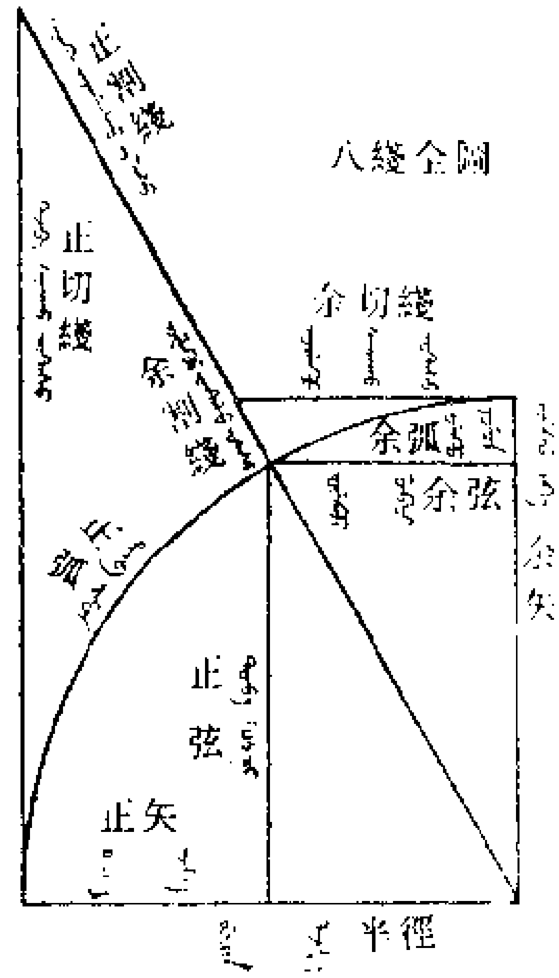


圖 1

［注］ (1) 正弦所對應的弧叫做正弧。

(2) 餘弦所對應的弧叫做餘弧。

(3) 三角圓的半徑($r=10^5$、10^6、10^7、10^8)叫“完整數”和一般圓半徑有所不同。

(4) 當時數角的方法與現在的不同，即第二象限內按順時針方向取爲 0°—90°的角。

2. 關於三角函數表和圓半徑的說明：

八綫表是兩象限的即 0°～180°角的三角函數，值爲五位數，度、分有數；秒沒有數，用比例關係算得，書中舉出兩實例。表中只給了正弦，正切、正割、餘弦、餘切、餘割的函數表。至於正矢、餘矢由它的定義再用正弦，餘弦的關係式很易算得。書中的角用三角圓的相應弧來代替。弧的單位有度、分、秒等。八綫表的結構如表 1。書中詳細說明已知弧求其對應函數值的查表法以及已知函數值求其對應弧的反查表法。

表 1

0°	正弦	正切	正割	餘弦	餘切	餘割	
0	00	00	000000	100000	00000000	00000000	60
1	29	29	100000	99999	343778667	343779682	59
2	58	58	100000	9	171887319	171887348	58
3	87	87	0	9	114591530	114591578	57
4	116	116	000000	9	85943630	85943689	56
5	145	145	0	9	68754887	68754960	55
6	175	175	0	9	57295721	57295809	54

7	204	204	0	9	49110600	49110702	53
8	233	233	0	9	42971757	42971873	52
9	262	262	0	9	38197099	38197230	51
10	291	291	0	9	34377371	34371516	50
11	320	320	1	9	31252137	31252297	49
12	349	349	1	9	28647773	28647948	48
13	378	378	1	9	26444080	26444269	47
14	407	407	1	9	24555198	24555402	46
15	436	436	1	9	22918166	22918385	45
16	465	465	1	9	21485762	21485995	44
17	494	494	1	9	20221875	20222122	43
18	524	524	1	9	19098419	19098680	42
19	553	553	222222	8	18093220	18093496	41
20	582	582	2	8	17188540	17188831	40
21	611	611	2	8	16370019	16370325	39
22	640	640	2	8	15625908	15626228	38
23	669	669	2	8	14946502	14946837	37
24	698	698	2	8	14323712	14324061	36
25	727	727	3	7	13750745	13751108	35
26	756	756	3	7	13221851	13222229	34
27	785	785	3	7	12732134	12732526	33
28	815	815	3	7	12277396	12277803	32
29	844	844	4	6	11854018	11854440	31
30	873	873	100004	99996	11458865	11459302	30
	餘弦	餘切	餘割	正弦	正切	正割	89°

表的左邊直列中的數 0～30 和表的右邊直列中的數 30～60 都是表示角的分數；表的左上角和右下角的數代表角的度數，設 n 爲角的度數，則 n＝0 時得表 1。令 n＝0，1，2……44 則得書中的所有表。

表中一個數字重複出現時，就保留它的末位數字，如 222222 可以寫成 2。

表中三角圓的半徑取爲 100000，所以通過八綫表求得任意三角函數值，必須把該函數值除以 100000。書中所提到的"從右降五位"就是這個意思。

三角函數的三角圓的半徑一般取爲 $r=10^7, 10^8, 10^9$ 或 10^{10} 不等，這裏爲了計算簡便起見在八綫表中將三角圓的半徑取爲 100000。

3. 關於各種三角函數的"九種"相求法：

1）已知弧求正弦、正切、正割和正矢的函數值。

2）已知弧求餘弦、餘切、餘割和餘矢的函數值。

3）已知函數值，求其對應的弧。

4）以餘弦（餘切、餘割、餘矢）代替已知正弦（正切、正割、正矢），求其對應的弧。

5）半徑不等於 100000 時，求任意三角函數。

6）求正矢與餘矢兩個綫。

7）半徑不等於 100000 時，求正矢與餘矢。

8）已知弧求其倍角的正弦。

9）已知倍角的正弦，求對應角。

書中提出了以上九個問題，並用文字叙述方式簡單給出了解法途徑。同時舉了五個典型實例說明其解法。

4. 其它兩種計算

在這裏着重談了所謂"八綫"的三角函數在天文學的各種計算中如何應用的問題。如已知經度和緯度，求圓的中心時用正切綫，求太陽射綫時用正切與餘切更簡便；應用三角函數確定日出沒時刻，晝夜的長短，日月會合時刻等，共提出八個問題。其次在八綫表中還指出了大於 90°而小於 180°弧的三角函數值的求法。

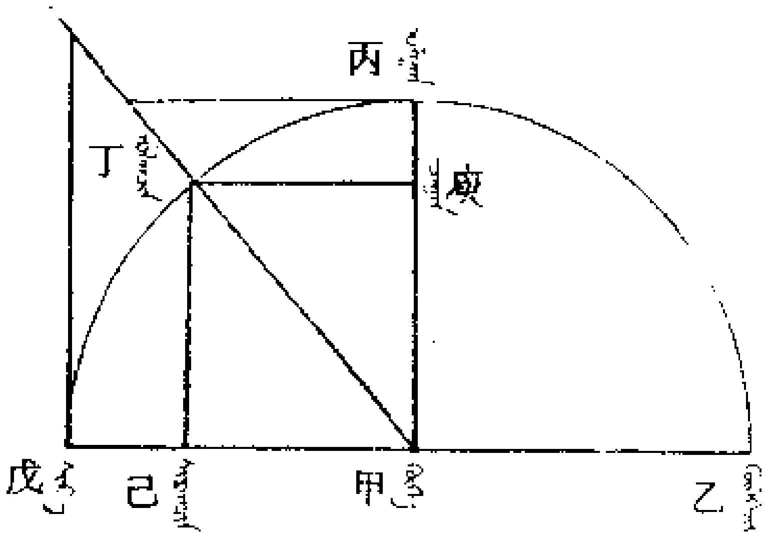


圖 2

任何一個大於 90°而小於等於 180°弧的正弦等三角函數的函數值都等於半圓周（180°）與該角的差的正弦值等，其值可由八綫表求得，其餘類推。

如求 130°弧的正弦等函數值，則（180°－130°）＝50°弧的正弦值等。

例如，乙丁爲 130°弧，則其正弦爲丁己綫段，丁己綫段代表乙丙丁與丁戊兩弧的正弦值，其餘類推。

三　歷史上蒙古族學者應用八綫的概況

烏魯伯格（1394－1449）是蒙古帖木兒帝國創立者、帖木兒的孫子於 1420 年在撒馬爾罕城組織了一百多位學者進行天文觀測和編算數學用表工作。在數學上所計算的正弦表精確到小數九位，又編制成 0°－45°之角每隔 1′和 45°－90°之角每隔 5′的正切表。

明安圖（1692？－1763？）是天文和數學史上一位傑出的人物。他約 19 歲選入欽天監當官學生，得到康熙的喜愛，1713－1752 年任欽天監時憲科五官正職務達 40 年之久。其工作之一是把時憲書譯成滿文、蒙文，以便向滿族，蒙古族地區散發。1730 年因推算日、月食不準，由兩個耶穌會士負責重編譯了一份表，包括日纏月離等重要內容，他們既不說明編表所依據的天文理論，也不說明使用方法，結果整個欽天監中的中國人只有明安圖一個人能用這份表，後來改變了這種局面。他在天文曆法，地圖測繪和數學方面作出了貢獻。他不僅證明了杜德美的三個三角級數，同時又發現了六個冪級數，可見他對三角函數很有研究。《天文原理》成書時，他初入欽天監，有可能與此書有間接的關係。

《天文原理》譯成藏文不久，有一位蒙古人把此書學通，並加以簡化，創造了一套與時憲曆的運算方法揉合起來的方法。隨即有人用藏文寫下來，題爲《漢曆中以北京地區爲主之日月食推算法》，其曆元爲1744年，距《天文原理》藏譯本的成書僅29年。漢曆（即時憲曆）、日、月食推算法傳入了蒙藏地區。

雍和宫的達喇嘛蒙古人烏力季巴圖著有《瞭河支那傳規日月交食推步術》，在北京圖書館有藏書，曆元爲1864年，大段引用《天文原理》中的有關部分。

綜上所述《天文原理》成書後，對蒙、藏地區推廣時憲曆起了很大作用，並反映了蒙古族學者，特别是寺廟中的喇嘛對時憲曆開展研究並所取得的成就。由以上可看出這部《八綫表》是最早的蒙文三角學著作。蒙文三角著作——八綫表的首次發現，是蒙古族數學史上的重大發現，同時在我國數學史上添補了新的内容。

蒙古族學者很早以前接觸過三角函數表，但作爲一個民族文化，應用本民族語言文字編譯出一部書，這還是第一次。因爲，中國數學史料中牽涉到少數民族文字編寫的數學著作中提到了滿文幾何原本，但未見到過蒙文八綫表的問題，可見過去國内未曾有人研究過。

四　結束語

時憲曆在世界天文學史上屬於歐洲16世紀末的第谷・布拉赫系統，已經開始進入近代天文學的領域，其推算日月食結果是很精確的，而其宇宙構造論，則是古希臘的托勒玫的地心論。八綫表是屬於西洋三角學，是當時的先進曆法和數學引進到蒙古地區，不僅如此，而且把時憲曆傳播到藏族地區。1715年把蒙文《天文原理》譯成藏文，以後藏文《天文原理》在藏族地區推廣時憲曆發揮了應有的作用。古代天文、曆法和數學是不分家的。所以我們談到八綫表時不能離開《天文原理》這本書。八綫表編譯刊印，顯示了蒙古族天文曆法上得天獨厚的優勢，蒙古族在天文學方面雖然起步晚一些，但已有較長的曆史，發展的很快，已跨人當時先進行列。

主要參考書

[1] 斯登等校注，《天文原理》（蒙文），1990，　内蒙科技出版社。
[2] 李儼：《中算史論叢》第三集，　1955，　科學出版社。
[3] 黄明信、陳久金：《藏曆的原理與實踐》，1987，　民族出版社。
[4] 李迪：《中國數學史簡編》，1984，　遼寧人民出版社。
[5] 陳久金：《天文學簡史》，1985，　科學出版社。

《陳厚耀算書》研究

李培業
(陝西財政專科學校)

陳厚耀，字泗源，號曙峰，江蘇泰州人。生於清順治五年(1648)，康熙丙戌(1706)進士。由李光地向康熙帝推薦，説厚耀通曆法。召見後，試以數學問題，均能答對。康熙四十七年(1708)，特命來京。經常與康熙帝討論數學問題，學問大爲長進。陳厚耀請定步算諸書，以惠天下，康熙準奏，特命梅文鼎的孫子梅瑴成來京，與陳厚耀共同修書於蒙養齋。康熙對梅瑴成説："知陳厚耀否？他算法近日精進。向曾受教於汝祖。今汝祖若在，尚將就正於彼矣！"[1]梅瑴成也説："厚耀於此學甚深，往往别尋蹊徑"[2]。可見陳厚耀的數學水平很高，在當時可算是第一流的數學家。

康熙對陳厚耀的學問非常賞識，嘗召入至淵鑒齋，反復詢問，又召至西暖閣，詢問家世甚詳。跟隨康熙至熱河，共同討論天文、數學問題。傳旨説："上道汝學問好，授汝京官，使汝老母喜也"。授中書科中書，并賜《算法原本》、《算法纂要》、《同文算指》、《嘉量算徑》、《幾何原本》等書。1713年修書成，特授翰林院編修。1713年後，又與梅瑴成等編纂天文算法書。康熙六十年完成《曆象考成》四十二卷、《律呂正義》五卷、《數理精蘊》五十三卷，合稱《律曆淵源》一百卷。雍正元年(公元1723年)出版。1714年遭母喪，康熙賜帑銀，着江南織造經紀其喪。喪畢，晉升爲國子監司業，擢左諭德兼翰林院修撰。1718年會試，充同考官，1719年因病告退，仍留原職。著作有《春秋長曆》十卷、《續增新法比例》四十卷、《句股圖解》二册。尚有《借根方算法》八卷、《算法纂要》一卷、《八表根》一卷、《幾何原本》六卷、《江南通志》、《揚州府　志》、《泰州志》均作陳厚耀撰，李儼疑非是[3]。康熙六十一年(1722)卒，享年七十五歲。

陳厚耀的數學著作多不全，就是《續增新法比例》，亦殘缺不全。我於1956年在西安古舊書店購得抄本《陳厚耀算書》共六册一函，爲李儼《近代中算著述記》所未錄，當即函告李儼先生，李先生在1957年6月12日、6月21日、12月11日、12月22日、12月30日，1958年1月6日、1月9日、2月1日、2月17日來信，均談到此書。後於其著作《中國數學大綱》(下册)中作了報道[4]。

抄本《陳厚耀算書》共六册，其中《句股圖解》兩册，《算法原本》一册，《直綫體》一册，《堆垛》一册，《借根方比例》一册。全書未題總名，因《句股圖解》目錄前書有"翰林院編修臣陳厚耀"數字，故暫定名爲《陳厚耀算書》。

現將各書作一介紹，供研究算史者參考。

(一)《勾股圖解》

《勾股圖解》明記爲陳厚耀所撰,其寫作年代不詳。這是流傳在世唯一完整的陳厚耀著作。首先對其寫作年代,我們做些考訂。

書内題翰林院編修陳厚耀,據傳載,陳厚耀於康熙癸巳(1713年)授翰林院編修,故知抄定此書,當在1713年後。但抄定并非寫作時間,其寫作時間尚需進一步研究。

從以下實事,可以確定,此書寫作當在編寫《數理精蘊》之前。

查此書中"積求勾股"中有四題,只有題而無解答。此四題是:

1. 已知勾股積、勾股和,求勾、股。
2. 已知勾股積、勾弦較,求勾、股。
3. 已知勾股積、股弦和,求勾、股。
4. 已知勾股積、股弦較,求勾、股。

可知,陳氏在寫此書時,尚未得出此四題解法。梅瑴成在《增删算法統宗》中給了上面1、2兩題解法(3、4兩題解法與1、2相同),並云:"勾股和較相求,言算者莫不留心焉,其法可謂詳且備矣,未有以勾股積與勾弦和較爲問者。……昔待罪蒙養齋,匯編《數理精蘊》。意欲立法以補缺遺,乃用平方輾轉推求,皆不能御。思之累日而後得之"[5]。阮元《疇人傳》丁維烈傳論曰:"文穆創立勾股二術,其以勾股積及勾弦較或股弦較爲問者,見於王孝通《緝古算經》,以爲向無其法,蓋偶未考爾"[6]。實際上王孝通已解決過此問題,陳厚耀、梅瑴成均未見到。此四題解法,載於《數理精蘊》卷二十四"附勾股法題四條"内,陳厚耀與梅瑴成同修書於蒙養齋,若梅氏已得解法,陳厚耀必知之。故知寫作此書,當在開始編寫《數理精蘊》(1713年)之前。

關於這點,尚有一實事可以佐證。朝鮮數學書《九一集》卷末載此書作者洪正夏與清朝五官司曆何國柱(此人履歷待查)論數學問題,時在康熙五十二年(1713)。中有二十多個勾股問題,皆洪正夏解答,上述1,4問題即其内[7]。當時何國柱尚未能解答這些問題,便錄之歸國。於此可見,1713年之前,這些問題,在清欽天監内尚無人解答。這從另一角度説明《勾股圖解》是1713年前的作品。

《勾股圖解》前有一篇《欽授積求勾股法》,在論證中引用幾何定理"平行四邊形爲對角綫所平分",指明是《幾何原本》三卷第四節。查此卷次,並非徐光啓所譯《原本》,亦非《數理精蘊》中《原本》,而是故宫所藏《原本》。故宫《原本》,錢寶琮先生確定爲公元1690年譯成。由此也可推斷《勾股圖解》作於1713年前。

其次,我們對其内容作些介紹。

此書卷首有一篇"欽授積求勾股法",單獨成篇,不在《勾股圖解》之内。"欽授"説明是康熙傳給陳厚耀的,康熙的數學著作不多見,僅有《三角形論》存於今[8],此篇可視爲康熙著作,其内容另文介紹,在此不贅述。

《勾股圖解》分兩大部:一是"以兩數求勾股",相當於《數理精蘊》中的"勾股弦和較相求法",一是"以積求勾股",相當於《數理精蘊》中的"勾股積與勾股弦和較相求法"。現分别介紹。

1. 以兩數求勾股

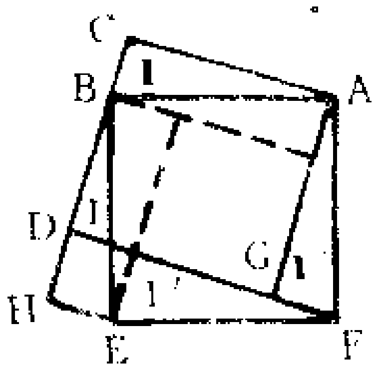
設直角三角形三邊爲a,b,c。楊輝提出勾股和較十三事,各有名稱,即

(1) 勾	a	(2) 股	b
(3) 弦	c	(4) 勾股較	b－a
(5) 勾弦較	c－a	(6) 股弦較	c－b
(7) 勾股和	b＋a	(8) 勾弦和	c＋a
(9) 股弦和	c＋b	(10) 弦和和	a＋b＋c
(11)弦和較	a＋b－c	(12)弦較和	c＋b－a
(13) 弦較較	c－b＋a		

從上述十三事內，已知兩事，就可解此直角三角形。如此問題，共有$\binom{13}{2}=78$種，《勾股圖解》只解其中50種，其餘的可能通過加減就可解決。故未著錄。《數理精蘊》中解決60題。並云："舊算書所有者八，按舊法可以變通者三十有四，舊法所無，今創立者一十有八"。這18種新創立者中就有8種已於《勾股圖解》中得到解決。所以說，《勾股圖解》的成就，在《數理精蘊》中得到了反映。

《勾股圖解》雖與《數理精蘊》中"勾股弦和較相求法"解決同一類型問題，但細加考查，也有自己的特色。

《勾股圖解》繼承了我國傳統的勾股術，多次引證我國古算書。而《數理精蘊》中則受《幾何原本》的影響較大。我們舉出兩例：



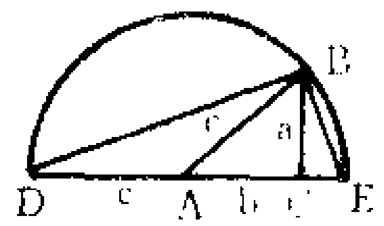
例1. 勾股定理的證法。

《勾股圖解》證法，利用右圖：

顯然，是利用了弦圖。原書證曰：

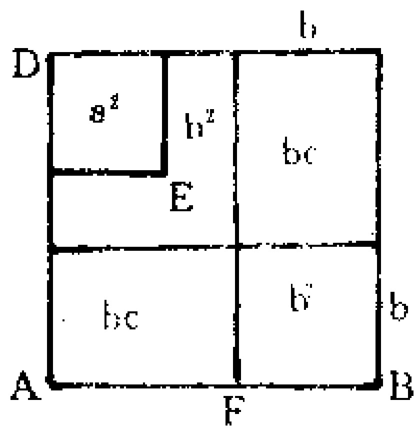
"股方(□AD)斜出於弦方(□AE)之外，而以弦長爲度，又以勾方(□DE)亦斜出於弦方之外，而與股方相連，則其斜出之兩勾股形(Ⅰ及Ⅱ)即弦方中所空之兩勾股形(Ⅰ'及Ⅱ')，若移置入內，則適成一弦方也"。

《數理精蘊》中證法則與《幾何原本》內的完全一樣。



例2. 已知勾(a)和股弦和(b+c)，求股(b)、弦(c)。

《數理精蘊》法："勾自乘，以股弦和除之，得股弦較。與股弦和相加，折半，得弦。於股弦和內減弦得股"。即



$$c-b=\frac{a^2}{b+c} \qquad (1)$$

$$c=\frac{(b+c)+(c-b)}{2} \qquad (2)$$

$$b=(b+c)-c \qquad (3)$$

(2)、(3)易證，(1)式證明如下：設 ΔABC 以 A 爲中心，以 AB=C 爲半徑作圓。延長 AC，得直徑 DE。

此時　　DC=c+b，　　AE=c－b

在直角三角形 DBE 中，$BC^2=DC\cdot CE$　(《幾何原本》卷九第二)　即

$$a^2=(c+b)(c-b)$$

$$\therefore \qquad c-b=\frac{a^2}{c+b}.$$

此處用到了《幾何原本》中的定理。

《勾股圖解》法："勾自乘，股弦和自乘，兩數相減，餘數折半，以股弦和除之得股"。　即

$$b=\frac{(b+c)^2-a^2}{2(b+c)}$$

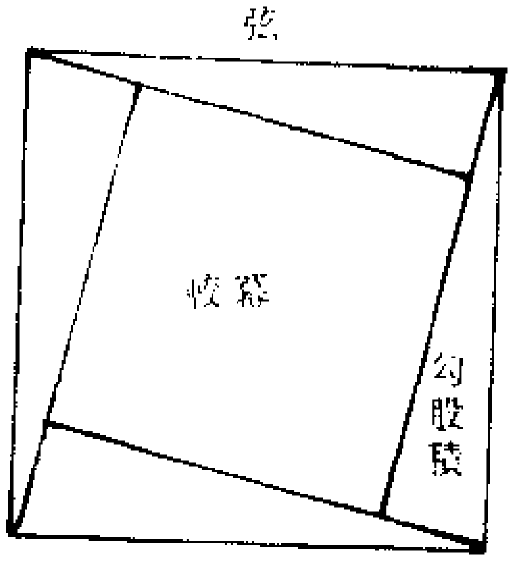
證明：作□ABCD＝$(b+c)^2$，在□ABCD 內減去□DE＝a^2，剩餘恰爲 $2b^2$ 及 $2bc$。折半，即爲長方形 CF。其寬爲 b，長爲 b＋c，面積爲$\frac{(b+c)^2-a^2}{2}$，故以 b＋c 除之，即得 b。

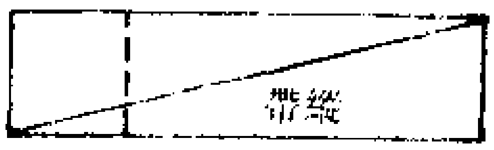
《勾股圖解》中多次引用《算法統宗》，例如：

①"有勾有股弦和，以求股求弦"條引曰："《統宗》有竹高風折，以稍尖去根，求折處之高，即此義"。

②"有勾有股弦較，以求股求弦"條引曰："臣按：《統宗》此法，引此四條，如立木不知高……，又如二葭併生池中，……又如闔門去閫，……又如鋸道深長若干……皆此法此義"。

③"有弦有勾股較以求勾求股"條內引曰："《統宗》有户高多廣若干，兩隅斜去若干，以求户高廣，即此義"。





④"有勾弦較、有股弦較，以求勾求股求弦"引曰："《統宗》有門不知高廣，以長竿橫、直、斜隅量之，以求門之高廣若干，即此勾弦較、股弦較之義也"。

從這些引用說明，《勾股圖解》是繼承了我國傳統的勾股術的。

2. 以積求勾股

這類問題是已知勾股形的面積，另知十三事中的一事，以解勾股形。共有十三個問題，但《勾股圖解》中只解決了九個問題。

《數理精蘊》中在"勾股積與勾股弦和較相求法"一節中，解決了九個問題，恰爲《勾股圖解》內所解的。而《數理精蘊》下編卷二十四有"附勾股法四條"恰是《勾股圖解》內有題無解的四個問題。因其解法用到開帶縱立方，故《精蘊》把它移至後面。

《勾股圖解》開頭有一小引曰："有積即可求勾股，爲前六歸開方之術是也。(即指'欽授積求勾股法')。然此惟正勾股可用，即勾三股四弦五之率耳。至於變勾股之生率不一，必須有積有弦(或有勾或有股)，然後可推。今略舉數條，並釋其義，其魔餘亦可推類而得之"。其中解法多利用弦圖。有的是陳厚耀自己的創作。例如："有勾股積有弦，以求勾求股"條，陳厚耀說："此法檢《算法統宗》、《數度衍》、《勾股義》、《同文算指》俱闕。今擬一法於此"。解法是："四因積，以弦自乘，兩數相減，餘數開方爲勾股較。又倍積，以勾股較爲帶縱，開方除之，得勾"。其圖如上；其解曰："弦自乘之內，有勾股積者四(即兩直方形積)，而多一較自乘積。今四因勾股積，以減弦自乘，則其所余者，

必較自乘之積也。故平方開之，得較。既得較矣，則合兩勾股積以爲直方形，而以較爲帶縱，開之，則得勾矣”。

《數理精蘊》中解法與此同。可見，這部分內容，陳厚耀參加了編寫。

(二)《算法原本》

《算法原本》系《幾何原本》的一個附本。《江南通誌》等書內記載陳厚耀撰《幾何原本》六卷，可能陳厚耀參與了翻譯整理《幾何原本》、《算法原本》的工作。

故宮博物院圖書館藏有七卷本《幾何原本》兩種，一大一小，內容全同，抄寫精美，儼然如刻本。其《幾何原本》皆附有《算法原本》，經我查對，與我所藏的《算法原本》完全一樣。所可注意者，故宮本《算法原本》內夾有一紙條，上書云：“《算法原本》第一篇前半頁第五行第十八‘也’字，疑‘此’字，第一篇後半頁末行首‘十’字，疑‘平’字，第八篇後半頁末行第三‘戌’字，疑‘戍’字，第二十一篇半頁第二行第十四‘丙’字，疑‘兩’字，恐系抄寫之誤，伏乞裁”。經我一一查對，我之藏本，所言改正之字，全然正確，而故宮本確系抄錯。故知我之藏本與故宮本同爲一祖本之復抄本。由“伏乞裁”句，知故宮本爲館臣進呈皇帝本。而我的藏本卻與陳厚耀的書在一起，這有兩種可能性：一種可能性，就是如陳厚耀傳中所載，是康熙所賜之本；另一種可能性是陳厚耀參與了編寫工作或進行了修訂工作。

康熙皇帝學習幾何之事，在白晉著的《康熙皇帝》一書中記載甚詳。其中有康熙帝令其法家把草稿謄清及親自撰寫序文的記載。證明故宮所藏《幾何原本》，完全屬實。故宮本《幾何原本》、《算法原本》各有序一篇，由序中可知《幾何原本》是譯作，而《算法原本》則是創作。其《算法原本》序中說：

“大數之理至微，數之用至大。…而明數實爲達士之所先，蓋以格物致知之端，必在乎是也。…若此者，種種需用，萬類百端，捨數不能也。是不可不司其法，而又不可不詳其理矣。苟非考究明備，洞澈源流，使理法感悉，猶入門而未入室，將手之所作，目之所視，心思之所聚，精神之所通，鮮有不失於泛務而無歸者。故著《算法原本》一書，以應學者”。

此《算法原本》與《數理精蘊》內《算法原本》比較，出入甚大。《數理精蘊》本分兩卷，共 59 條，故宮本不分卷，共 75 條，有的內容爲《數理精蘊》所缺少。我們將其第一條錄如下，以作對比。

《數理精蘊》本	故宮本
一者，數之原也。衆一相合而數繁焉。不能無大小多寡之不齊，而欲知其所以分合之故，必有一定之法，始可以得其準。若夫累積小數與大數等者，此小數即度盡大數之準也。苟累積小數，不能與大數等者，此小數即非度盡大數之準也。要之小數爲大數之平分者，即能度盡大數。而小數非大數之平分者，即不能度盡大數。是故以小度大，以寡御多，求其恰符而毫無奸者，惟在得其平分之法而已。	夫一者，數之根也。衆一相合而謂數焉。然數不能無少多小大之參差。而欲齊之，必有一定之法，始可考其準耳。故累倍小數若與大數等者，此小數謂度盡大數之準也。苟幾倍小數，不能與大數等者，此小數謂非度盡大數之準也。然小數之可以能度盡大數者，此小數謂大數之平分也。苟小數不能度盡大數者，此小數謂大數之不平分也。以少度多，以小度大，求其恰符而毫不奸者，亦惟在得其平分之法也矣。

由上舉例看出,《數理精蘊》本文筆簡練,表達準確,是在故宮本的基礎上修改而成的。

故宮本《幾何原本》、《算法原本》是公元 1690 年譯成的[9]。遠在《數理精蘊》成書之前。

(三)《直綫體》、《堆垜》、《借根方比例》

此三册與《數理精蘊》中相應部分完全相同,但未寫《數理精蘊》書名,單獨成書。估計它的寫成年代當在 1713 年以後。

陳厚耀精研算理,梅瑴成在《增删算法統宗》中多次引用陳厚耀論説。在求平地堆米、倚壁堆米的體積時,瑴成引證陳厚耀學説,並言:"泗源先生,泰州宫諭,諱厚耀,於此學甚深,往往别尋蹊徑,存此以見一斑。"可見,陳厚耀於求積問題,多有探究,故《直綫體》、《堆垜》等論述求積問題的書,爲其所撰寫是可能的。

《借根方比例》係當時傳入之代數學。康熙五十年(公元 1711 年),康熙與直隸巡撫趙宏燮討論數學問題,提到"阿爾朱巴爾…",即阿爾熱巴達,也就是"借根方"[10]。陳厚耀在 1708 年進京,比梅瑴成早見康熙,故先授給借根方是可能的。《江南通誌》記載《借根方算法》八卷係陳厚耀所撰,不是没有緣由的。所以《數理精蘊》中"借根方比例"部分出於陳厚耀的手筆是可能的。

從以上的介紹,我們可以得出以下兩點結論:

(1)《陳厚耀算書》中各書,都與陳厚耀有關,或者爲其所撰(如《勾股圖解》及其他),或者爲康熙所親授(如《欽授積求勾股法》)、或者爲康熙所賜(如《算法原本》)。

(2)《陳厚耀算書》中各書,均爲《數理精蘊》所採納。有的改編,有的全錄。這説明陳厚耀參加了《數理精蘊》的編寫工作,《陳厚耀算書》就是他編寫材料的一部分。

参考文獻

[1] 阮元:《疇人傳》卷 41"陳厚耀"。

[2] 梅瑴成:《增删算法統宗》。

[3] 李儼:"近代中算著述記",《中算史論叢》第二集,1954,中國科學院出版,第 103～308 頁。

[4] 李儼:《中國數學大綱》下册,1958,科學出版社,第 405 頁。

[5] 梅瑴成:《增删算法統宗》卷 9"新增用帶縱立方求勾股法"。

[6] 阮元:《疇人傳》卷 41"丁維烈"。

[7] (朝鲜)洪正夏:《九一集》,1983 年,韓國科學史學會編印。

[8] 李迪:《中國數學史簡编》,1984 年,遼寧人民出版社,第 256 頁。

[9]錢寶琮主编:《中國數學史》,1964,科學出版社,第 268 頁。

[10]李迪:《中國數學史簡编》,第 256－257 頁。

《衡齋算學》第二册研究

李兆華
（天津師範大學數學系）

汪萊（1768，9，27—1813，12，4）[1]《衡齋算學》第五册（1801）以方程的根爲根據將二次方程和三次方程予以分類並討論其正根的求法，《衡齋算學》第七册（1804）進一步討論高次方程的正根判別式。上述兩項工作實以《衡齋算學》第二册的工作爲基礎。三次方程 $x(p-x)^2=q$[2]（$0<x<p$）有二正根之發現及其解法爲《衡齋算學》第二册的主要內容。

梅瑴成（1681－1763）指出，有勾股形面積、勾弦和（或股弦和）求勾股形可歸結爲帶兩從相同和數立方求解[3]。以勾股積、勾弦和爲例，梅氏由方程

$$y^2\left(\frac{c+a}{2}-y\right)=\frac{\left(2\times\frac{1}{2}ab\right)^2}{2(c+a)}$$

解得 $y=a$，進而得 c,b。梅氏的方法正確但結果不完整。囿於《數理精蘊》關於三次方程正根個數的認識和解法，梅氏失掉一解。汪萊即以此爲起點，指出形如 $x(p-x)^2=q$（$0<x<p$）的方程可有二正根並給出解法[4]。

1. 有勾股積、勾弦和求勾股形有兩解

汪萊指出，有勾股積、勾弦和必得兩勾弦較，各與勾弦和聯立必得兩勾股形[5]。同樣的方法適用於股弦和代替條件中勾弦和的情形。

汪萊首先指出勾弦和與兩勾弦較的關係："兩勾弦較兩數及兩勾弦較相併與勾弦和相減之餘數必爲連比例之三率。兩勾弦較兩數必爲首末二率，兩勾弦較相併與勾弦和相減之餘數必爲中率。"若記

$$s=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}a_1b_1=\frac{1}{2}a_2b_2, c+a=c_1+a_1=c_2+a_2,$$

則有

$$(c_1-a_1)(c_2-a_2)=\{(c+a)-[(c_1-a_1)+(c_2-a_2)]\}^2。$$

或即

$$\begin{cases}x_1x_2=G^2\\x_1+x_2=(c+a)-G,\end{cases}\tag{1}$$

其中 x_1,x_2 分别爲首率或末率，G 爲中率。

汪萊的結論正確，但未明確指出證明過程。事實上，因勾股形等積等勾弦和，則

$$\frac{b_1}{b_2}=\frac{2a_2}{2a_1},$$

或

$$\frac{\sqrt{(c_1+a_1)(c_1-a_1)}}{\sqrt{(c_2+a_2)(c_2-a_2)}}=\frac{(c_2+a_2)-(c_2-a_2)}{(c_1+a_1)-(c_1-a_1)},$$

$$\frac{\sqrt{c_1-a_1}}{\sqrt{c_2-a_2}}=\frac{(c+a)-(c_2-a_2)}{(c+a)-(c_1-a_1)}.$$

設 $c_1-a_1\neq c_2-a_2$,整理可得

$(c_1-a_1)(c_2-a_2)=\{(c+a)-[(c_1-a_1)+(c_2-a_2)]\}^2$,此即 c_1-a_1,$(c+a)-[(c_1-a_1)+(c_2-a_2)]$,$c_2-a_2$ 爲連比例三率,或即(1)。(1)爲汪萊的一個重要的關係式。只要求得 G,由此可建立以 x_1,x_2 爲根的二次方程。《衡齋算學》第二册不止一次用到這一關係式。

既得勾弦和與兩勾弦較關係,汪萊進一步給出兩勾弦較的求法。建立方程[6]

$$G^2[G+(c+a)]=\frac{(4\times\frac{1}{2}ab)^2}{c+a},\tag{2}$$

$$x\{[(c+a)-G]-x\}=G^2\tag{3}$$

由(2)求得中率 G[7],代人(3)得長闊二根分别爲首末二率,即兩勾弦差。

汪萊借助幾何方法由(1)導出(2)、(3),結果正確。其中,方程(2)的推導是關鍵所在,原著對此記載頗詳。以現代的數學方法觀之,汪萊的推導是一個分析過程,其方法的實質相當於下列步驟。因

$$\frac{(4\times\frac{1}{2}ab)^2}{c+a}=(2a)^2(c-a)=[(c+a)-(c-a)]^2(c-a),$$

令勾弦差 $c-a=x$,則

$$x[(c+a)-x]^2=\frac{(4\times\frac{1}{2}ab)^2}{c+a}.\tag{4}$$

因 x 有兩解 x_1,x_2,將 x_1,x_2 分别代人(4),得

$$x_1[(c+a)-x_1]^2=\frac{(4\times\frac{1}{2}ab)^2}{c+a},$$

$$x_2[(c+a)-x_2]^2=\frac{(4\times\frac{1}{2}ab)^2}{c+a},$$

兩式左右分别相乘,所得等式兩端同時開平方,并注意到關係式(1),即得(2)。

汪萊進一步考慮到,由(2)所得 G 若爲近似值,則代人(3)解得 x 亦必有誤差。設首率 x_1 爲長根,末率 x_2 爲闊根,則 x_1 必大於真值 x_1^*,x_2 必小於真值 x_2^*。於是,汪萊又給出修正 x_1,x_2 的方法及精確度判别法。其法相當於將 x_1-1,x_2+1 分别代人

$$f(x)=\frac{x^2[2(c+a)-x]+\frac{(4\times\frac{1}{2}ab)^2}{c+a}}{(c+a)^2}-x\tag{5}$$

并依下列步驟進行:

若 $f(x_1-1)=0$,則 $x_1-1=x_1^*$。

若 $f(x_1-1)>0$,則 $x_1-1>x_1^*$,更當減。又減一數,至不可減則還其本數,待次位之減。若有多位皆如法求之。以中率爲限。

若 $f(x_1-1)<0$,則 $x_1-1<x_1^*$,不可減。

若 $f(x_2+1)=0$,則 $x_2+1=x_2^*$。

若 $f(x_2+1)>0$,則 $x_2+1<x_2^*$,更當加。又加一數,至不可加則還其本數,待次位之加。若有多位皆如法求之。以中率爲限。

若 $f(x_2+1)<0$,則 $x_2+1>x_2^*$,不可加。

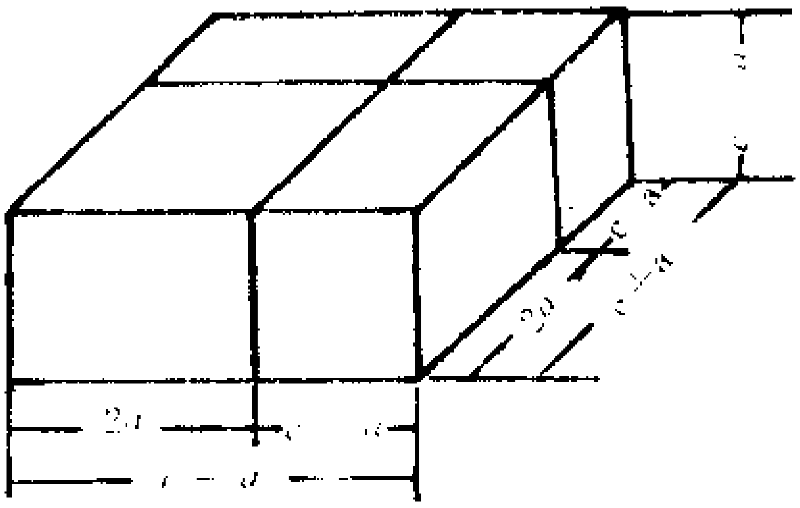


圖 1

汪萊以幾何方法所得表達式(5)及判别法是正確的,原文有詳細的推導過程。限於篇幅,本文祇能概述如下。(5)的分子的常數項 $\frac{(4\times\frac{1}{2}ab)^2}{c+a}=(2a)^2(c-a)$ 可視爲

$$\frac{x[2(c+a)-x]+\dfrac{(4\times\frac{1}{2}ab)^2}{c+a}}{(c+a)^2}=x。\tag{6}$$

令(6)等號左端與右端之差爲 f(x)則得(5)。保持如圖 1 的長方體底面$(c+a)^2$不變(原文稱之爲"範"),由(2)、(3)所得x_1,x_2分别以$(c+a)^2$爲底構成長方體,則x_1與其長方體之高同增同減,x_2與其長方體之高一增一減。此即汪萊近似根精確度判别法之依據。事實上,方程(6)即方程(4),由(2)、(3)所得x_1,x_2即方程(4)的二正根(真值或近似值)。

2. 有體積、高闊和求帶從立方有兩解

汪萊進一步指出,已知體積 V,高闊和 a 求帶從扁立方

$$x(a-x)^2=V \tag{7}$$

有兩解,給出其解法並指出同樣的方法適用於帶從長立方$x^2(a-x)=V$。汪萊給出(7)的解法是:"命積爲帶從長立方積,以高闊和爲所帶之從,用帶從長立方法開得本方根爲兩形高數之中率,中率與高闊和相減,餘爲帶從平方之長闊和,中率自乘爲帶從平方積,用帶從平方長闊和法開之,得長闊二根爲兩形之兩高數。"[8]此即建立方程

$$G^2(G+a)=V \tag{8}$$

$$x[(a-G)-x]=G^2 \tag{9}$$

由(8)解得正根 G,代入(9),由(9)解得長闊二根。即爲(7)的二正根。

容易證明此法正確。設兩扁立方等積等高闊和,由$V_1=V_2$,得$x_1(a-x_1)^2=x_2(a-x_2)^2$,設$x_1\neq x_2$,則$x_1x_2=(a-x_1-x_2)^2$,即$x_1,a-x_1-x_2,x_2$成連比例三率。以上文所述的方法,由(7)導出(8)、(9)。

對於 1,汪萊給出例子,已知$\frac{1}{2}ab=210,c+a=49$,有兩勾股形:20,21,29;12,35,37。此即

$$x(49-x)^2=\frac{(4\times210)^2}{49}$$

合乎題意的二正根是$x_1=9,x_2=25$。該方程的另一正根是 64。

對於 2,汪萊給出例子,已知$V=900,a=19$,有兩高:9,4。此即方程

$$x(19-x)^2=900$$

合乎題意的二正根是$x_1=9,x_2=4$。該方程的另一正根是 25。

綜上可知,汪萊由具體問題出發,發現形如$x(p-x)^2=q(0<x<p)$的方程可有二正根,並由二正根、中率及已知條件的關係求得中率,從而得到原方程的二正根。方程$x(p-x)^2=q(0<x<p)$可有二正根及其解法的發現皆屬獨創。《衡齋算學》第二册篇幅不長而影響重大,歸納言之,約有兩端。其一,由於三次方程可有多正根之發現,導致方程根的個數、性質、判别法等方程理論的研究,因此該書標志着中國傳統數學方程論從解法研究進入理論研究。其二,兩勾弦較與勾弦和的關係、兩高與高闊和的關係,即下列兩式

$$(c_1-a_1)(c_2-a_2)=\{(c+a)-[(c_1-a_1)+(c_2-a_2)]\}^2,$$

$$x_1x_2=(a-x_1-x_2)^2$$

皆可化爲形如

$$x^2+xy+y^2=k$$

的二次不定方程。此式對於清末造同積同勾弦和勾股形的研究以及二次不定方程的研究有創始之功。該册算書關於形如 $x(p-x)^2=q$ 的解法頗爲曲折，推究其故，實與當時的數學背景有關。問題的提出在《數理精蘊》，而《數理精蘊》閱帶從立方皆求一正根。汪萊既發現帶兩從相同和數立方可有二正根，則不得不借助僅有一正根的帶一從較數立方以求中率，又借助矩形的長闊和與面積建立帶從和數平方以求長闊二正根。

參考文獻與注釋

[1] 汪宜楷：《汪萊先生年譜》。油印本，1986。汪萊的六世孫汪宜楷於1986年以所撰《汪萊先生年譜》油印本寄贈。據此年譜所載，汪萊生年爲乾隆三十三年舊曆八月十七日，卒年爲嘉慶十八年舊曆十一月十二日。本文據此對照公曆。

[2] 本文表示常數的字母皆表正的常數。

[3] 《數理精蘊》下編卷二十四，光緒八年刊本。《赤水遺珍》稱："有勾股積及股弦和較或勾弦和較求勾股向無其法。"事實上，由勾股積及股弦較或勾弦較求勾股法已見於王孝通《緝古算經》。王書於清初之流傳不絕如綫，梅氏難能見及。

[4] 方程 $x(p-x)^2=q$ 當其有正根時則有一正根或三正根。汪萊所列方程應有三正根但needs條件 $0<x<p$ 者有二正根。該方程即《衡齋算學》第五册第五十一條所論方程。梅瑴成所列的方程 $y^2(\frac{c+a}{2}-y)=\frac{(2\times\frac{1}{2}ab)^2}{2(c+a)}$ 已經作了變換 $\frac{c+a}{2}-x=y$，非本法。

[5] 汪萊指出，由勾弦和所得爲兩勾弦較或一勾弦較一股弦較。當所得爲股弦較時，條件中的勾弦和即爲股弦和。

[6] 《錢寶琮科學史論文選集》P. 242 的中率方程作 $y^3-ky-\frac{4A^2}{k}=0$，誤。當作 y^3+ky^2 $\frac{(4A)^2}{k}=0$。同頁及次頁的求勾股弦密數方程中 $4A^2$ 亦應改爲 $(4A)^2$。其中 $A=\frac{1}{2}ab$，$k=c+a$。

[7] 方程(2)的解法已見於《數理精蘊》下編卷二十四。此即帶一從較數立方，有一正根。

[8] 汪萊指出，二正根或同小於 $\frac{a}{2}$，或一小於 $\frac{a}{2}$，一大於 $\frac{a}{2}$ 而小於 a。前者表示兩扁立方，後者表示一扁立方一長立方。

項名達構造遞加數的方法分析

特古斯
（內蒙古師範大學科學史研究所）

項名達(1789—1850)，字步萊，號梅侶，浙江仁和人。《象數一原》是其代表作，全書七卷，集中討論了遞加數的建立與應用，也提到它的若干性質。其中前四卷主要用於創立遞加數，本文依據原著前四卷，着重分析了他構造遞加數的第一種方法，認爲它是應用(RMI)^{2}程序(即二重"關係、映射、反演方法")的一個範例，然後説明第二種方法是第一種方法的簡化手續。

1. 構造遞加數的方法之一

對此方法文獻〔8〕中已有涉及，爲説明問題，這裡再作介紹。考慮

$$\varphi(x,t,k+1)-\varphi(x,t,k-1)=(-1)^k x\varphi(x,t,k). \tag{1}$$

$$\varphi(x,t,k+1)+\varphi(x,t,k-1)=\begin{cases}\varphi_1(2t+k-1)，若\ |k+1|\ 爲奇數，\\ 2-\varphi_2(2t+k-1)，若\ |k|\ 爲奇數。\end{cases} \tag{2}$$

這裏 $\varphi(x,t,k)(k\in Z)$是單位圓上的一些綫段，滿足

$$\varphi(x,t,0)=\varphi(x,1-t,0), \tag{3}$$

$$\varphi(x,t,-1)=-\varphi(x,1-t,1), \tag{4}$$

$t\in Q$ 是只與 x 取值方式有關的參量。$\varphi_1(t)$是 t 分通弦，$\varphi_2(t)$爲 t 分倍矢，而 $x=\varphi_1(1)$。由弦矢關係易知，$\varphi_2(2)=x^2$。

(1)、(2)便是項氏割圓術的解析等價式。如果 $k=0,1$ 時有

$$\varphi(x,t,k)=\sum_{r=0}(-1)^r H_k^p X^r,\left[p=2r+\frac{1-(-1)^k}{2}\right], \tag{5}$$

則由(1)，對一切 $k\in Z$ 亦有(5)，且

$$H_k^p=H_{k-2}^p+H_{k-1}^{p-1},\quad P、k\ 同奇偶。 \tag{6}$$

(6)就是所謂遞加數，$t=1$ 時爲整分遞加數，$t\in(0,1)$時爲零分遞加數。如上所見，遞加數可依 $\varphi(x,t,0)$與 $\varphi(x,t,1)$的確定而完全確定。對此，項氏有如下借率定理：

"分母奇者借一分弧通弦爲二率，分母偶者借二分弧通弦爲二率。求第一形腰，視分母數奇或偶而折半，則奇即以奇數爲形數，用前整分諸腰率；折半仍偶，則以偶數加一爲形數，用前半分諸腰率爲除法。以兩分子相減，其數奇或偶而折半，則奇即以奇數爲形數，用前整分諸腰率；折半仍偶，則以偶數加一爲形數，用前半分諸腰率爲乘法。置半徑，乘法乘之，除法除之，得第一

形腰率。求第二形腰，即以求第一形之除法爲除法。視分母數奇，分子倍之爲形數，用整分腰率數；偶分子加一爲形數，用半分腰率爲乘法。置半徑，乘法乘之，除法除之得第二形腰率”。即對 $t=\frac{m}{n}$ 如令

$$y=\varphi_3(1)=\begin{cases}\varphi_1(\frac{1}{n}), & \text{若 } |n| \text{ 爲奇數,}\\ \varphi_1(\frac{2}{n}), & \text{若 } |n| \text{ 爲偶數,}\end{cases} \tag{7}$$

也即

$$y=\begin{cases}2sin(\frac{1}{n}arcsin\frac{x}{2}), & \text{若 } |n| \text{ 爲奇數,}\\ 2sin(\frac{2}{n}arcsin\frac{x}{2}), & \text{若 } |n| \text{ 爲偶數,}\end{cases} \tag{7}$$

則

$$\varphi(x,\frac{m}{n},0)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(y,1,|n-2m|-1)}{\varphi(y,1,n-1)}, & \text{若 } n \text{ 爲奇數,}\\[2ex] \dfrac{\varphi(y,\frac{1}{2},|\frac{n}{2}-m|)}{\varphi(y,1,\frac{n}{2}-1)}, & \text{若} \frac{n}{2} \text{ 爲奇數,}\\[2ex] \dfrac{\varphi(y,1,|\frac{n}{2}-m|-1)}{\varphi(y,\frac{1}{2},\frac{n}{2})}, & \text{若} \frac{n}{2} \text{ 爲偶數,}\end{cases} \tag{8}$$

$$\varphi(x,\frac{m}{n},1)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(y,1,2m-1)}{\varphi(y,1,n-1)}, & \text{若 } n \text{ 爲奇數,}\\[2ex] \dfrac{\varphi(y,\frac{1}{2},n-m)}{\varphi(y,1,\frac{n}{2}-1)}, & \text{若} \frac{n}{2} \text{ 爲奇數,}\\[2ex] \dfrac{\varphi(y,\frac{1}{2},n-m)}{\varphi(y,\frac{1}{2},\frac{n}{2})}, & \text{若} \frac{n}{2} \text{ 爲偶數。}\end{cases} \tag{8}$$

關於借率規則(7)，“本可不論奇偶概借用一分弧之通弦，惟因易率時須寄其分，而借半分起度諸率者其率又先有寄分，若寄分大，取數必繁，不便於乘除加減。今於奇分每借一分通弦，偶分母别借二分通弦用爲二率，則可折半以取分，而分較小，數乃不至於過繁”。於是，注意到由(2)

$$\varphi_3(k)=\begin{cases}\varphi(y,1,k-2)+\varphi(y,1,k), & \text{若 } k \text{ 爲奇數,}\\ \varphi(y,\frac{1}{2},k-1)+\varphi(y,\frac{1}{2},k+1), & \text{若 } k \text{ 爲偶數,}\end{cases}$$

有

$$\varphi(x,\frac{m}{n},k-1)+\varphi(x,\frac{m}{n},k+1)=\varphi_1(\frac{nk-(n-2m)}{n})$$

$$=\begin{cases}\varphi_1(|nk-(n-2m)|)=\varphi(y,1,|nk-(n-2m)|-2)\\ +\varphi(y,1,|nk-(n-2m)|),\text{若 } n \text{ 爲奇數,}\\ \varphi_1(|\frac{n}{2}k-(\frac{n}{2}-m)|)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\varphi(y,\frac{1}{2},|\frac{n}{2}k-(\frac{n}{2}-m)|-1)+\varphi(y,\frac{1}{2},|\frac{n}{2}k-(\frac{n}{2}-m)|+1),\text{若}\frac{n}{2}\text{ 爲奇數,}\\ \varphi(y,1,|\frac{n}{2}k-(\frac{n}{2}-m)|-2)+\varphi(y,1,|\frac{n}{2}k-(\frac{n}{2}-m)|),\text{若}\frac{n}{2}\text{ 爲偶數.}\end{cases}$$

因此,"凡分母弧及兩分子相減,餘弧其分奇,應用整分率;分偶而折半得奇者仍用整分率,折半仍偶者始用半分率"。具體地,以奇 n 爲例,由(3)以及

$$\varphi(x,\frac{m}{n},-1)+\varphi(x,\frac{m}{n},1)=\varphi(x,\frac{m}{n},1)-\varphi(x,\frac{n-m}{n},1)$$

$$=\varphi_1(\frac{2m-n}{n})=-\varphi_1(\frac{n-2m}{n})$$

知,$\varphi_1(\frac{n-2m}{n})$在 $\varphi(x,\frac{m}{n},1)+\varphi(x,1-\frac{m}{n},1)$上居中,因此 $\varphi_1(\frac{n-2m}{n})$與 x 平行且關於$\frac{n}{2}$分半徑對稱。則當 $y=\varphi_1(\frac{1}{n})$時,由(2),(1)

$$x=\varphi_1(n)=\varphi(y,1,n-2)+\varphi(y,1,n)$$
$$=2\varphi(y,1,n-2)+y\varphi(y,1,n-1),$$

$$-\varphi_1(\frac{n-2m}{n})=\varphi_1(|n-2m|)$$
$$=2\varphi(y,1,|n-2m|-2)+y\varphi(y,1,|n-2m|-1),$$

即 $\varphi(y,1,n-1)$與 $\varphi(y,1,|n-2m|-1)$同在$\frac{n-1}{2}$分半徑上,故

$$\varphi(x,\frac{m}{n},0):1=\varphi(y,1,|n-2m|-1):\varphi(y,1,n-1),n \text{ 爲奇數。}$$

其餘均可類證,所用無非相似三角形對應邊成比原理,過程雖不復雜,結果卻很有用,也較簡約。其實零分初值 $\varphi(x,t,0)$與 $\varphi(x,t,1)$亦可徑由(1)、(2)以整與半分諸腰 $\varphi(x,1,k)$與 $\varphi(x,\frac{1}{2},k)$表出,但都不抵(8)之便當,項氏也可謂"獨具隻眼矣"。

由(8)及(1),求解(6)的基本問題歸結爲當 $t=1,\frac{1}{2}$;$k=0,1$ 時確定(5)。爲此,令 $t=1$,則由(1)、(2)

$$\varphi(x,1,0)=1,\quad \varphi(x,1,1)=x。$$

即(6)的整分初值爲

$$H_0^P=\begin{cases}1, & \text{若 } P=0\\ 0, & \text{若 } P\neq 0,\end{cases}\quad H_1^P=\begin{cases}1, & \text{若 } P=1,\\ 0, & \text{若 } P\neq 1.\end{cases}\tag{9}$$

由此解得

$$H_K^P=\begin{cases}C_{\frac{k+p}{2}}^{\frac{k-p}{2}}, & \text{若 } P、K \text{ 同奇偶且 } P\leqslant k,\\ 0, & \text{若 } P、K \text{ 奇偶不同或 } k<P。\end{cases} \tag{10}$$

由於P、K同奇偶時可設

$$p=n+m,\qquad k=n+m,$$

則

$$H_K^p=C_n^m,\qquad (m\leqslant n)。$$

如H_K^p以P、K爲行列,則(10)中劃掉0後所餘三角陣就是賈憲三角斜視之圖,項氏稱其爲整分遞加數。由上述過程可知,遞加數雖係遞加而得,得法卻與賈憲不同,更不同於帕斯卡。至於董祐誠,他僅有弦矢關係,除併積外是不能直接得到遞加數的。

次令$t=\frac{1}{2}$,注意到

$$2-\varphi_2(1)=2\sqrt{1-\frac{1}{4}\varphi_1^2(1)}=\sqrt{4-x^2},$$

則由(1)、(2),

$$\varphi(x,\frac{1}{2},0)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}},\qquad \varphi(x,\frac{1}{2},1)=\frac{1}{2}x\varphi(x,\frac{1}{2},0).$$

項氏首先將$\varphi(x,\frac{1}{2},0)$的分母展爲

$$\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{2^{4n-1}}x^{2n}, \tag{11}$$

其中

$$u_1=1,\quad u_n=\sum_{k=1}^{n-1}u_ku_{n-k},(n\geqslant 2)。 \tag{12}$$

於是

$$\varphi(x,\frac{1}{2},0)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}v_nx^{2n}, \tag{13}$$

其中

$$v_0=1,\qquad v_n=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{u_{n-m}v_m}{2^{4(n-m)}}。 \tag{14}$$

而

$$\varphi(x,\frac{1}{2},1)=\frac{1}{2}x\varphi(x,\frac{1}{2},0)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}v_nx^{2n-1}, \tag{15}$$

即(6)的半分初值爲

$$H_0^p=(-1)^{\frac{p}{2}}v_{\frac{p}{2}},\qquad H_1^p=(-1)^{\frac{p-1}{2}}\frac{1}{2}v_{\frac{p-1}{2}}。 \tag{16}$$

由此解得

$$H_k^p = \frac{u_p}{2^p P!}, \quad p,k \text{ 同奇偶}, \tag{17}$$

其中

$$u_0 = 1, \quad u_1 = k, \quad u_p = [k^2 - (p-1)^2]u_{p-2}.$$

(17)即所謂半分遞加數,由於對任 $k \in Z, H_k^p \neq 0$,因將三角陣推廣爲無限矩陣。

既得整分與半分遞加數,則由(8)可得(6)的零分初值。(8)確定的初值是經由(7)借率所得,由於本率是以本弧通弦爲二率,即當 $t = \frac{m}{n}$ 時的 H_k^p 爲 x 的係數,而

$$x = \varphi_3(n) = \varphi_1(1) = \begin{cases} 2\sin(n\arcsin\frac{y}{2}), & \text{若 } |n| \text{ 爲奇數}, \\ 2\sin(\frac{n}{2}\arcsin\frac{y}{2}), & \text{若 } |n| \text{ 爲偶數}, \end{cases}$$

因此須還借率爲本率,這一過程稱爲易率法。由(1)

$$x = \frac{\varphi(x,\frac{m}{n},1) + \varphi(x,\frac{n-m}{n},1)}{\varphi(x,\frac{m}{n},0)}, \tag{18}$$

以(8)代人,則

$$x = \begin{cases} \dfrac{\varphi(y,1,2m-1) + \varphi(y,1,2(n-m)-1)}{\varphi(y,1,|n-2m|-1)}, & \text{若 } n \text{ 爲奇數}, \\[2ex] \dfrac{\varphi(y,\frac{1}{2},m) + \varphi(y,\frac{1}{2},n-m)}{\varphi(y,\frac{1}{2},|\frac{n}{2}-m|)}, & \text{若 } \frac{n}{2} \text{ 爲奇數}, \\[2ex] \dfrac{\varphi(y,\frac{1}{2},m) + \varphi(y,\frac{1}{2},n-m)}{\varphi(y,\frac{1}{2},|\frac{n}{2}-m|-1)}, & \text{若 } \frac{n}{2} \text{ 爲偶數}. \end{cases} \tag{19}$$

具體易率時"乃準求得諸率,逐次取用借率對率相核,增其歉而損其盈乘除之,使與求得率等"。設已求得借率式

$$\varphi(x,\frac{m}{n},0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y^{2k} \tag{20}$$

以及

$$\frac{x^{2k}}{n^{2k}} = \sum_{i=0} b_{k,i} y^{2k+2i}, \tag{21}$$

則其易率式

$$\varphi(x,\frac{m}{n},0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k}{n^{2k}} x^{2k}, \tag{22}$$

其中

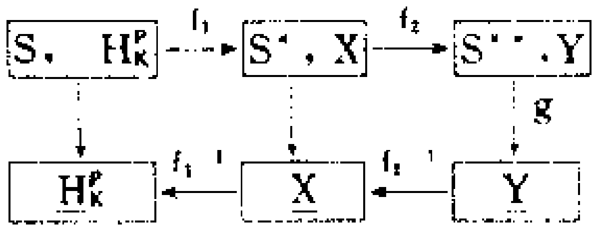
$$u_0 = a_0, \quad u_k = \frac{1}{b_{k,0}}(a_k - \sum_{n=1}^{k-1} b_{n,k-n} u_n).$$

$\varphi(x,\frac{m}{n},1)$ 的情形也類似,可知本法實與明安圖創卡塔蘭數第一法[4]同,是一種非常靈巧的變

換程序。

初值既得，則(6)易解。

綜上可知，項氏構造遞加數的經過，乃是應用(RMI)² 程序(即二重"關係、映射、反演方法")的一個範例。



如圖所示，(S, H_K^p)爲關係結構(6)，H_K^p 爲此結構中的目標對象。(5)可視爲某映射類的幺元 $f_1^{-1}=f_1$，(S^*, X)爲(S, H_K^p)在 f_1 下的象

$$f_1(H_K^p) = X = \varphi(x, t, k)。$$

f_2 爲映射(8)，而 f_2^{-1}爲其逆射(19)。(S^{**}, Y)爲(S^*, X)在 f_2 下的象

$$f_2(X) = Y = \varphi(x, t, k), \quad (t = 1, \frac{1}{2})。$$

g 爲定映手續(1)、(2)。最後，g 是可定映的，這由(7)得到保證。

2. 構造遞加數的方法之二

除上述外，項名達尚有一法構造遞加數。項氏有感於賈憲三角"逐層各數左一右一常不動，中間諸位併上層兩數爲下層一數"，即 $C_0^0=C_n^n=1$ 及 $C_n^k=C_{n-1}^{k}+C_{n-1}^{k-1}$，依樣仿造了如下一個結構

$$N_k^0 = 1, \qquad N_k^p = N_{k-1}^p + N_{k-1}^{p-1}。 \tag{23}$$

稱 N_k^1 爲"根"，N_k^0 爲"根差"。其法先取正有理數 $N_1^1=t<1$ 爲首根，則其他諸根即由(23)得以確定。次令

$$N_p^p = \frac{1}{P!}\prod_{k=1}^{p} N_k^1, \tag{24}$$

稱爲各乘首積。最後，由(23)即得其他各積。

在法顯然較前法爲便捷，且由(24)可有多種以根求積法。不過與其說它是一項發明，毋寧說是一個發現，因爲惟其由象到數，才能說明所得結果可以致用。對他這一發現，項名達以半分爲例驗證如下：先"以半分起根遞加全分，如整分法本根求積，別衍成遞加一圖"，再"以半分起度遞加全分，亦如整分法按度出綫，別聯成各種兩等邊三角。三角形既得，乃用率法乘除，求得逐形腰底"，然後"考其數，則與半分起根遞加數等"。事實上，由於

$$H_K^p = \frac{u_p}{n^p P!}, \qquad P、k \text{ 同奇偶}, \tag{25}$$

其中

$$u_0 = 1, \qquad u_1 = m + \frac{k-1}{2}n,$$

$$u_p = [(m + \frac{k-1}{2}n)^2 - (\frac{p-1}{2}n)^2]u_{p-2},$$

故只須令

$$H_K^P = N^P_{\frac{P+K}{2}},\tag{26}$$

則由(6)立得(23)。至於(24),由(26)及(25)

$$N_P^P = H_P^P = \frac{1}{P!}\prod_{K=1}^{P} H^1_{2k-1} = \frac{1}{P!}\prod_{K=1}^{P} N^1_k。$$

由(26)及(25)甚至還可以得出

$$N_K^P = \frac{u_p}{n^P P!}\tag{27}$$

其中

$$u_0 = 1, \qquad u_p = [m - (P - k)n]u_{P-1}。$$

遞加數的構造過程於是得以極大的簡化。

本文得到我的導師李迪教授、羅見今副教授的悉心指導,謹此鳴謝。

參 考 文 獻

〔1〕項名達,《象數一原》,光緒戊子上海本。

〔2〕李儼:《中算史論叢》第三集,科學出版社,1955 年。

〔3〕何紹庚:"項名達對二項展開式研究的貢獻",《自然科學史研究》第 1 卷第二期,1982 年。

〔4〕甘向陽:"割圓函數級數展開之研究",北京師大碩士論文,1988 年。

〔5〕山田慶兒:《中國古代科學史論》,京都大學人文科學研究所,1989 年。

〔6〕羅見今:"明安圖創卡塔蘭數的方法分析",《內蒙古師大學報》自然科學版,1989 年第一期(科學史增刊)。

〔7〕徐利治、鄭毓信:《關係映射反演方法》,江蘇教育出版社,1988 年。

〔8〕特古斯:"《象數一原》中的卡塔蘭數",《數學史研究文集》第二輯,內蒙古大學出版社及(臺灣)九章出版社,1991 年。

李善蘭的《垛積比類》是早期組合數學的傑作*

羅見今
（內蒙古師範大學科學史研究所）

李善蘭（1811－1882）的數學名著《垛積比類》（《則古昔齋算學》（1867）之四）是一本什麼內容的書？《中國數學史》認爲它是高階等差級數求和的著作[1]，文[2]提出若干反例，說明用高階等差級數的理論不能解釋或概括各支垛即廣義賈憲三角。本文將在[2][3]等文的基礎上進一步討論《垛積比類》在中算垛積術中的影響、垛積術在數學分類中的歸屬以及該書在中國早期組合數學史中的地位。對《垛積比類》重新進行歷史評價，在組合數學蓬勃發展的今天，具有一定現實意義。

一　中算垛積術集大成的著作

在我國數學史上，宋朝偉大的科學家沈括（1031－1095）首創隙積術，開始了對垛積的研究，嗣後許多數學家如宋楊輝（1261）、元朱世杰（1303）、清陳世仁（1676－1722）、汪萊（1768－1813）、董祐誠（1791－1823）、羅士琳（1774－1853）以及李善蘭等繼續了這一工作，并發揚光大，探討了按不同方式排列的幾十類垛積。他們前後的研究互相連貫，表達的規律又彼此相關，因而在數學史中別樹一幟，自成系統。其中朱氏、李氏的成就佔有重要地位。

李善蘭繼承了古代垛積研究成果。《垛積比類》卷一三角垛基本公式

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{k+p-1}{p}=\binom{n+p}{p+1}$$

來自朱氏《四元玉鑑》[4]，楊輝、陳世仁、汪萊對此也都有貢獻；卷一“三角垛圖”取自汪萊《遞兼數理》[5]，它的畫法和分解垛的方法影響了《垛積比類》全書，卷一 m－1 乘支垛求積術

$$\binom{n+p}{p+1}+(m-1)\binom{n+p-1}{p}=\binom{n+p-1}{p}\frac{m(n-1)+p+1}{p+1}$$

當 m＝2 時即一乘支垛；本來自董祐誠的方錐堆[6]，也是朱氏的四角垛、四角落一垛等；卷二乘方垛是陳世仁的“平尖、立尖”的擴充，卷四三角變垛即朱氏“…嵐峰形垛”。

然而李氏的工作并非簡單的承襲。他個人的創新精神在《垛積比類》中表現得十分突出。他找到了朱氏三角垛公式（一乘支垛）、董氏方錐堆公式（二乘支垛）同“嵐峰形垛”間的關係，着片把後者的每一垛抽出，按垛積招差術擴充，就可以得到前二者，以及各乘支垛，於是創造了支垛之法，即推廣了賈憲三角。他首創“三角自乘垛”、“變垛之法”，給兩個係數表以嚴格的遞歸定

---

* 該文系作者碩士論文“《垛積比類》研究”（1981）的結論部分，首次發表，以紀念李善蘭逝世110周年。

義、縝密分析了諸根函數等，爲古代垛積術所未見。他之所以在該書序言中躊躇滿志地寫道："垛積之術，於九章外別立一幟，其說自善蘭始"，這大概就是其中的原因吧。

當時的數學家評論說：李善蘭的垛積術"朱氏以後當首屈一指"[7]。《垛積比類》是中算垛積術之集大成者。垛積種類原是繁多的，如芻童垛、芻甍垛、圓箭、方箭、各種臺垛、諸尖十二法、各種嵐峰形等，但有的應用廣，派生能力强，是垛積主流，而三角垛及其有關各類垛是其中最重要的內容。李氏正是掌握這一點充分發揮，而創造了垛積古算法的新成就，所以在清末以至本世紀頗有影響。

縱觀中算垛積術著作，有書目可稽者約四十餘種，《垛積比類》成書前後約各佔一半。1867年後四十年間，垛積著作蜂起，平均約兩年一種，不能不說是受到《垛積比類》的啓發。它的問世，既受到贊揚，也不免於批評，說明它的影響，已迫使數學家們對它表態。當然褒之者居多，如周達說："李秋紉氏著垛積比類，枝分條貫，推闡無遺，讀者嘆觀止矣。"[8]徐有壬說他的研究"幾無餘蘊"，崔朝慶說他"首屈一指"，反映了當時數學界的一般評價。當然也有針砭之作，如强汝詢提出十項質疑[9]，周達對《垛積比類》不予證明的缺點也有批評。

李氏之後垛積著作雖多，但除個別人外，水平并不高。章用說："李氏…垛積術，國內亦無嗣響"指的就是這個意思。周敏英的《堆垛圖說》，基本是《垛積比類》一卷的內容，崔朝慶的《垛積一得》把《垛積比類》一卷"演成代數細草"，强汝詢的《垛積術術》四卷雖論述頗詳，但內容除圓垛外，沒有超出《垛積比類》一卷的範圍；江衡的《垛積解義》一卷復述《垛積比類》一、二卷，它的二卷明積較之理。其他如陳志堅《雜題類存》、無名氏《透廉細草》等垛積內容有限，價值不高。唯周達《垛積新義、餘義》有新見，且用微積分算出各乘方垛通項公式，但已是1902年的事了。

二　關於垛積術歸屬的討論

垛積術屬於數學的哪一部分？

這個問題在古代看法有變化，也有分歧。宋元時期認爲屬"商功"，入清以後認爲屬"少廣"。按商功、少廣爲《九章算術》的兩章，商功主要解決工程中計算體積等問題；少廣的原意，唐李淳風解曰："截取其從（縱）少，以益其廣"[10]，明程大位解曰："截縱之多，益廣之少"[11]，均指開方。

最早的垛積問題是爲求體積。宋沈括說："隙積者，謂積之有隙者，如累棋、層壇及酒家積罌之類"[12]，他認爲"緣有刻缺及虛隙之處，用芻童法求之，常失於數少"，於是按照求"芻童"（上下底均矩形的棱臺）體積的方法，補上一項予以修正。楊輝、朱世杰的垛積也都依隙積術立算，楊氏在《詳解九章算法》（1261）商功第五中把垛積問題附於體積之後。明代數學式微，垛積了無成就，及至前清陳世仁，有《少廣補遺》一卷專明垛積之法，顯然視垛積爲少廣一目。《四庫全書總目提要》亦稱"堆垛乃少廣之一術"。以後諸家皆以垛積爲少廣。然而《九章》少廣論開平、立方，二十四問中并無堆垛，故《疇人傳》的作者阮元論曰："垛積之術，不見於九章，乃商功之流，而以爲少廣者，近代算家之陋也。"[13]阮元指出了分歧，但沒有解釋：垛積之術亦不見九章商功，爲什么不屬少廣而屬商功呢？

李善蘭說："垛積之術於九章外別立一幟，"這是對的。宋秦九韶所說的"反錐差"3，2，1，"方錐差"1，4，9，"蔟藜差"1，3，6雖都本自九章[14]，然而尚不是垛積術；衰分章中倒是有不少涉及級數的問題，但也非垛積術。把堆垛歸入《九章》商功或少廣的願望均未免牽强，這是傳統思想

來由舊章之弊。事實上發展起來的垛積術已獨立於《九章》,開闢了一個新的領域。

當然,這并不意味着歷史上的看法毫無根據。從垛積起源來看,沈括把它當體積來處理,可以說是《九章》商功的發展;而同時它又是以計數來表體積的。楊、朱之後轉變爲數列求和或單純計數,或求堆垛層次,後者要用天元術和開方術,與《九章》少廣有關。特别是開方要用賈憲三角,而主要的一種垛積三角垛計數的結果正構成賈憲三角,這使兩者聯係起來了。所以認爲垛積術屬少廣,亦不無道理。

到了現代,對垛積術的看法也不是没有區别的。李儼認爲它屬級數論,這顯然是正確的。當然,"級數"外延較廣,於是進一步具體化,現在一般認爲它是"對高階等差級數的求和法"[15]。文[2]已説明這不能概括李善蘭的許多支垛,另外有的垛如朱氏圓錐垛積[16]也不是等差的:

1	3	7	12	19	27	37	48	61	…
	2	4	5	7	8	10	11	13	…
		2	1	2	1	2	1	2	…
			−1	1	−1	1	−1	1	…

這些事實會影響到上述的結論。

另一方面,章用是從數論函數的角度來研究垛積術的,以P爲變數,以 $\sum_{j=1}^{n}$ 爲算子,滿足若干函數方程式,形成一數論函數系,這毫無疑問也是正確的,當然同樣需要進一步具體化。

數論函數中有一類遞歸函數[17],它的變元和函數均非負整數,只要知道了初始條件,運用遞推式進行有限次代入,就可以求出各位值的函數。垛積公式正是這樣的函數,它可以有一、二、三個遞歸變元,表現各支垛、各垛、各層之間的函數關係,包括了垛積的各要素,該系統各垛層次井然,可被唯一確定。垛積公式的重要内容是組合公式——它是遞歸函數中的一種[18]。

文獻[2]將《垛積比類》主要内容概括爲十餘個組合恒等式,這一事實確證凡與賈憲三角有關的基本垛和支垛均可以而且應當用組合表出,這是對象本身的組合性質所確定的,而不是後人整理時的穿鑿附會。但應説明,這裡所講的組合 $\binom{m}{n}$,不包含"從m個元素中取出n個元素的取法總數"的意義。這種解釋有其歷史根據。

組合數 $\binom{m}{n}$ 公式在歷史上可以追溯出兩種互不相干的發源,其一是二項式定理係數方面的工作,最早是11世紀我國的賈憲三角,楊輝、朱世杰、吳敬、周述學、程大位、李之藻、梅文鼎等人的工作一脈相承地沿此綫索發展,歐洲等地的數學家也有各自的貢獻;其二是從m個東西中取出n個構成一個組合、求組合總數這個意義上的工作,由歐洲的Rabbi Ben Ezra(1140)[19]、印度的Bhaskara(1150)以及法國人Leviben Gerson(1321)[20]逐步地形成完善的認識,這兩方面各自平行地發展,只是到17世紀,法國人Pascal才指出組合 $\binom{m}{n}$ 也能給出二項式係數。於是在西方數學中兩者才匯合。因此在中算史里如果用符號 $\binom{m}{n}$,那么只表係數三角,我們在論文[2]中指出凡計算 $n(n+1)\cdots(n+p-1)/p!$ 都寫成 $\binom{n+p-1}{p}$,并只在計算係數三

角的意義上解釋組合符號，其原因正在這裡。

垛積公式既然是遞歸函數，同時它的主要內容又是組合函數，那么整理史料時使用組合符號就不僅是可以的，而且是不可避免的。事實上許多前輩數學史工作者已經做了大量研究，如文獻[16]雖將三角垛表爲 $n(n+1)\cdots(n+p-1)\div p!$（或類似形式），應當承認在運算上它與 $\binom{n+p-1}{p}$ 毫無區别。文獻[21]用組合觀點對朱氏垛積術進行概括，得出八個組合恒等式，所用符號 $\frac{n^{[p]}}{1^{[p]}}$ 也就是 $\binom{n+p-1}{p}$。文獻[22]和[23]全部使用組合符號 $\binom{m}{n}$，包括[1]、[24]在內的幾乎所有研究垛積史的文獻都用符號 $f_p^n=\binom{n+p-1}{p}$，因而在理論上進一步確認垛積同組合的關係，也就是確認垛積數列同賈憲三角的關係，就成爲順理成章的了。

基於這樣的認識，可以斷言，離開組合的觀點將不可能全面總結垛積術，尤其是《垛積比類》。這是對垛積術的歸屬進行理論分析的必然結論。

三　組合數學及其簡史

組合數學(combinatorial mathematics)或稱組合學(combinatorics)、組合論、組合分析，是一門古老而新穎的數學分支[25]。它主要研究一般爲有限多個離散對象在某些事先指定的約束條件下，如何排列、分配或配置的問題[26]。而分析學所研究的，一般是無限與連續對象，這是它們之間的根本區别。組合數學的"組合"，與廣義(如"工業組合"、"綫性組合"等的"組合")或狹義(即 $\binom{m}{n}$ 所表示的"組合")的"組合"(combination)是有區别的，不可混淆。組合數學的內容，有計數理論、結構理論、存在性理論、優化理論[28]。由於它的應用廣泛，發展很快，與其他多種學科都有交叉，所以對它內容的整理和分類，不同著作可能差别較大，但是計數理論是基礎，則是一般的看法，它主要包括排列組合，二項式定理與係數三角形，遞歸函數，各種計數函數(counting functions)和母函數，有限差分[27]，數列變換—各種廣義莫比烏斯反演(Mobius inversion)，鮑利亞(G. Polya)計數定理，幻方等內容[26]。在組合計算方面，近年迅速發展起一個有用的分支，即關於組合恒等式的研究，J. Riordan，L. Carlitz 和 H. W. Gould 均有專著，後者包括 550 個公式。這些著作中，已經把李善蘭恒等式收入[28]。本文認爲《垛積比類》的內容正好屬於組合數學的計數部分，涉及到排列組合、二項式定理與係數三角形、遞歸函數、計數函數和母函數，以及有限差分等，在計數理論有相當的比重。

在現代數學中，組合數學是與歷史上古代數學聯係較多的一種。這門分支的奠基人是萊布尼兹(Leibniz，1646—1716)，他在 1666 年的《組合學論文》中曾預見到這一分支將能應用於整個科學領域。早期組合學的研究是同初等數論、古典概率論密不可分的。因此多種著名的初等數論函數，遞歸問題，概率論中的排列組合問題、母函數方法等，現在又可以同時看作是組合數學的對象。只是到了 1930 年前後，英國改良小麥品種進行農田試驗時應用正交表安排實驗設計[29]，引起了人們對組合方法的注意，而 40 年代末期特别是 50 年代以來，由於計算科學的巨大發展，促成了現代組合數學的興起，研究對象擴大了，舊有的材料賦予了新的意義，引進了現代數學概念與方法，在計算、概率統計、運籌、物理、化學以至生物等學科上都有不少應用。

隨着組合數學的蓬勃發展，對它的基礎的探討更加廣泛，對組合學前史(1666年以前)的興趣也日益濃厚。

現在，組合學界公認三階幻方(縱横圖'洛書'，九宮算)是人類表達組合現象的最原始的貢獻，它的起源可以追溯到遠古的中國，對它歷史的論證已有多種專文論及。[30][31] 其實，對於排列、組合、配置等現象有多方面的研究是中國古代數學的重要特色，例如道教的八卦、六十四卦的排列，天干地支相配紀年六十年周而復始的配置，羅盤中以八卦和干支雜糅相配以表二十四方位的記法，"可能是世界上最古老的數學游戲"[32]的 Chinese game of Nim(抓三堆或火柴游戲)，沈括《夢溪筆談》中的棋局都數，司馬光《潛虚》中的氣、體、性、名之圖，以及文王課、三才算等等，在組合學前史中可以說是源遠流長。特別是賈憲三角形的創造，是組合學前史中的里程碑，它有多方面的應用，經歷代數學家發揚光大，其中一方面形成了以三角垛爲中心的垛積體系，可以看成是以垛積爲有限離散對象的組合研究。對於我國中世紀數學中組合分析方面的成就，李約瑟曾預言進一步的探索會大有收獲，因此進行系統的研究、整理將是不無裨益的。

四 早期組合數學的傑作

根據以上的探討，可以得出如下結論：

1.《垛積比類》研究了賈憲三角以及與它有關的十餘種三角陣，創造了把它們展開爲組合級數的分析方法，得到了一系列組合公式，其中主要的結果均爲組合恒等式，例如冪和公式、李善蘭恒等式等，在組合計算方面成績斐然，已爲中外矚目。

2.《垛積比類》所提出的數學對象及全部成果均屬於遞歸函數的範圍[33]：$\binom{n+p-1}{p}$ 可由原始遞歸函數經過代入而得，n^m 爲原始遞歸函數；$\binom{n+p-1}{p}^m$ $(m=2)$，$n^m\binom{n+p-1}{p}$ $(m=1,2,3)$ 是原始遞歸函數的復合；原著中可用算符 $\sum$ 或 $\prod$ 表示的函數均爲原始遞歸函數(可變多個項的和或積)；而 $\sum''$ 是 $\sum$ 的復合。

3. 由文[3]可知，《垛積比類》一卷在事實上提出了一個完整的關於第一種李氏數的母函數是升階乘積的母函數定理，在我國數學史上當爲首創，原著第二、第七兩係數表精確定義了兩種李氏數 l_p^n 和 L_p^n，也就是 Stirling 數和 Euler 數，特别又推廣到李氏多項式三角形 $L_p^n(p)$。李善蘭對數 L_p^n 的認識有相當深度和廣度。

4.《垛積比類》造表的數學方法是有限差分及其逆運算。前言說："元郭太史以(垛積)步躔離"，按郭守敬造《授時曆》創三次内插公式主要用招差術，這裡所以言垛積，雖然將二者視同術，李氏將這一對互逆運算統一於造支垛表之中，事實上提出了廣義賈憲三角的概念，進而溝通了有限差分與組合的關係，這在理論上有重要意義。

總之，《垛積比類》是早期組合數學的傑作。

但事情還不止以上四點。《垛積比類》在處理研究對象時，并没有將它局限於四卷之中，其内容尚可多方引伸，由於所提供材料的優秀品質，它與計數理論有更深的關係，會激發更多的聯想。雖然這些工作已不是李氏的，但原著的確開闢了進一步發揮的廣闊餘地。以下舉出幾個

例子，限於本文目的，只列結果，不予證明：

例 1 將三角自乘垛推及一般，有$\binom{n+p-1}{p}^m$，用李氏方法展開爲組合級數，即將高階組合降階後表爲一階組合之和，可得[22]：

$$\binom{n+q}{q}^m=\sum_{k=0}^{(m-1)q}S_k^{m-1}(q)\binom{n+mq-k}{mq}$$

式中 $S_k^m(q)$叫 Szekerez 數，它的定義是

(i) $S_0^0(q)=1$；$S_k^0(q)=0$，當 $K>0$；(ii) $S_k^m(q)\equiv 0$，當 $k<0$；

(iii) $S_k^m(q)=\sum_{i=0}^{k}S_i^{m-1}(q)\binom{q+i}{k}\binom{m-i}{k-i}$.

當 $q=1$，$S_k^m(1)=L_k^m$，爲第二種李氏數；當 $m=1$，$S_k^1(q)=\binom{q}{k}^2$；$m=2$ 即李善蘭恒等式。

例 2 三角自乘支垛的最大表根 R^n，即賈憲三角"中垂綫"上的數，與一種計數函數—卡塔蘭數[25] Cn 之間存在如下關係：

$$C_n=\frac{1}{n}R_{n-1}。式中\ C_n=\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}而\ R_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}.$$

由這一最大表根公式的啓發，卡塔蘭數亦可分解爲

$$C_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}^2.\ (n\geqslant 1)$$

於是此式對卡塔蘭數的意義作出了一種新解釋。

例 3 第一種李氏數 l_k^n 可用於斯特靈反演(Stirling inversion)[34]。記 $S_{n,k}$爲第二種斯特靈數(Stirling numbers of the second kind)，其定義爲[35]：對所有的 n，$k\geqslant 0$，

(i) $S_{0,0}=1$，$S_{n,0}=0$，當 $n>0$，　　(ii) $S_{n+1,k}=S_{n,k-1}+k\,S_{n,k}$

於是有互反公式((ii)中規定 $U_0=V_0$)：

(i) $V_n=\sum_{k=0}^{n}S_{n,k}U_k$，　(ii) $U_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}l_k^nV_{k+1}$

例 4 全部支垛中存在着廣義莫比烏斯反演的關係。我們應用文獻[36]所提出的可逆圖示程序的原則，能夠得到支垛的二項式反演(binomial inversion)的一對互反公式：

$$G_{n+1}^p=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}G_{k+1}^{p-k},\qquad G_{n+1}^{p-n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}G_{k+1}^p$$

它適用於所有廣義賈憲三角。其實前一公式就是牛頓內插公式(Newton's interpolation formula)：

$$U_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Delta^kU_1$$

在廣義賈憲三角中的表現。這是一個有趣的題目，今以實支垛爲例加以說明。爲切合[36]的原文，不彷將支垛表逆時針旋轉 120°：

如取 $p=3$，$n=3$，則有

$$G_4^3=\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}G_{k+1}^{3-k}=1+3\cdot 12+3\cdot 30+30=47$$

反之，$$G_4^0=\sum_{k=0}^{3}(-1)^{3-k}\binom{3}{k}G_{k+1}^3=-1+3\cdot13-3\cdot55+147=20$$

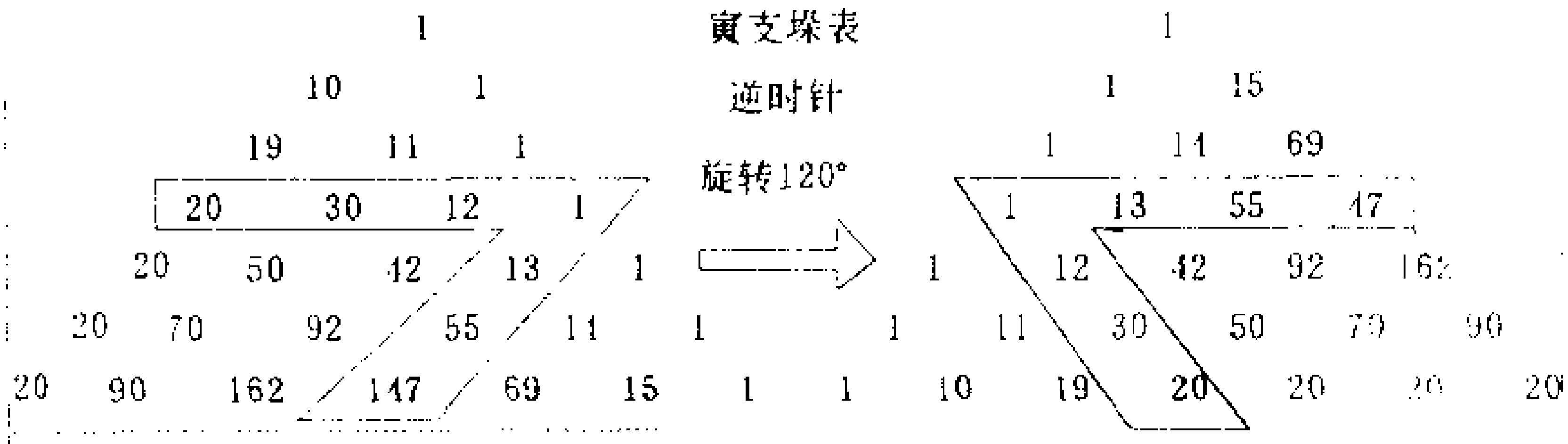


表10. 支垛的二项式反演

“早期的中國數學成就顯示了算術和代數的探索基於深奧的歸納法的知識之上”，美國賓州大學弗朗克・斯威茲[37]曾這樣地高度評價中國古代數學長於歸納的特點，他并說："演繹系統是菁華的，只是在歸納之後和以經驗爲基礎的試驗建立起來才能承擔得起，在此基礎上、(演繹)這一理論思考才能繼續進行”。李善蘭在《垛積比類》中所創造的堂皇的垛積歸納—演繹系統，正是在這樣的基礎上發展起來的。雖然書中没有如今天所見的證明——這是一個明顯的缺憾，但他以自己的方式，從不同角度來定義同一對象，使得我們對他的思想有了比較清楚的瞭解。他用了帶有抽象性質的方法，其目的是爲了建立垛積體系，而不是爲了具體的直接應用，所以并沒有列出一道應用題，這大概已經變成了“知識分子的一種審美的消遣，”如果這對數學的發展是必須的，那麼他的工作似乎已經指向了“一個抽象的演繹科學”的聖壇。

文獻和注釋

[1] 錢寶琮：中國數學史，科學出版社，1981，327。
[2] 羅見今：《垛積比類》内容分析，内蒙古師範學院學報（自然科學版）1(1982)，89—105。
[3] 羅見今：李善蘭對 Stirling 數和 Euler 數的研究，數學研究與評論，3(1982)，173—182。
[4] 朱世傑：四元玉鑒(1303)，茭草形段 1，2，4，6，7 問；如象招數 1，2，5，35 問；果垛疊藏 1，6，14—20 問等。
[5] 汪萊：遞兼數理，衡齋算學七卷之四(1799)。
[6] 董祐誠：堆垛求積術，見董方立遺書(1821)。
[7] 崔朝慶：垛積一得序，見古今算學叢書。
[8] 周達：垛積新義序，福慧雙修館算稿(1902)。
[9] 强汝詢：垛積衍術四卷，序言二(1898)。
[10] 轉引自錢寶琮校點《算經十書》上册(1963)，143
[11] 程大位：直指算法統宗(1592)。
[12] 沈括：夢溪筆談，卷十八技藝(1093)。

[13] 阮元:疇人傳.卷四十一(1799)。
[14] 秦九韶:數書九章(1247),轉引自李儼:中算家的級數論,中算史論叢(一),333。
[15] 辭海:理科(上),11。
[16] 見李儼:中算家的级数論,中算史論叢(三),345。
[17] 羅莎·培特:遞歸函數論,莫紹揆譯(1958),24—25 有遞歸函數的定義。
[18] 同上.17,27,44 § 5。
[19] H. J. Ryser:Combinatorial Mathematics,New Jersey(1963),1。
[20] 莫里斯·克萊因:古今數學思想一册.318。
[21] 錢寶琮:朱世杰垛積術廣義,學藝.四卷七號(1923)。
[22] 章用:垛積比類疏證,科學,第 23 卷 11 期(1939),647—663。
[23] 方淑姝:朱世杰垛積術廣義,數學雜志 2 卷 1 期,(1939)94—101。
[24] 李儼、杜石然:中國古代數學簡史下册(1964),330。
[25] 徐利治:組合數學,自然雜志 10(1980),751—2。
[26] T. Brylawski:Combinatorics,McGraw—Hill Encyclopedia of Science & Technology,中譯文見《科學技術百科全書》第一卷數學,357。
[27] Matin Aigner:Cornbinatorial Theory, Springer—Verlag Berlin Heidelberg New York (1979)。前言中說計數部分包括母函數、反演和計算有限差分。
[28] J. Riordan:Combinatorial Identities. Wiley,New York(1968),17。
[29] 高橋磐郎:組合學理論的應用,岩波全書 316(1980)序論。
[30] 李儼:中算家的縱横圖研究,中算史論叢(一),175—176。
[31] 李約瑟:中國科學技術史第 3 卷數學,123—136。
[32] A. S. Frankel & H. Hrda:Never Rush to be first playing Nimbi, Math. Mag. Vol. 53,1 (1980)
[33] 見[17],26—30,
[34] 見[27],96.
[35] 見[27],91,473。
[36] 徐利治、蔣茂森:獲得互反公式的一類可逆圖示程序及其應用,吉林大學學報 4(1980),43—55。
[37] Frank J. Swetz: The Development of the Ancient Chinese Mathematics, Math. Mag, Vol. 51,1(1979),10—19。

附　錄

李善蘭的詩文*

羅見今
(內蒙古師範大學科學史研究所)

李善蘭(1811.1.2—1882.12.20),字壬叔,號秋紉,浙江省海寧縣硤石鎮人,19世紀我國著名的科學家。他的一生留下了大量數學、天文學、力學、植物學等方面的著述和譯述,當時就產生了很大的影響。清末以來,各種叢書、文集廣爲收錄。他的著譯書目已見之於《李善蘭年譜》、《中國數學史》、"天算大家海寧李善蘭的著述"等文獻。近來,從北京圖書館查出李氏詩集、文集抄本各一種,爲上述文獻所未提及,即《聽雪軒詩存》和《則古昔齋文抄》,對研究李善蘭的生平思想,有一定參考價值。

《聽雪軒詩存》,徐氏汲修齋抄本,有"光緒二十五年歲次已亥(1899)同里後學朱昌燕"序、"光緒二十六年歲次庚子錫山汪煦"序(叙),并錄李善蘭甥崔敬昌"李壬叔徵君傳"。這本詩集是朱昌燕等人在李氏去世十八年後多方收集遺詩匯編而得,每首詩的寫作時間與地點多不可考,內容分三卷,卷上40首,卷中29首,卷下60首。後者係從詩人"少作"200餘首中甄擇而成。

李善蘭不僅從十歲就能演算《九章算術》,而且稍長就能寫詩和文章。後來他的算學"爲中外所共仰","詩非其所注意",然而所交多海內名士,特別與寶山蔣敦復、金山顧觀光爲莫逆交、"纂述之暇,以詩相唱和",作爲在艱苦繁重的數學思維之後一種積極的休息方法。李氏的詩,就內容而言,多爲叙事、感懷、狀物、言志,當然還有不少以詩會友的唱酬之作。

李善蘭名中有"蘭","原名心蘭,字秋紉,壬叔其晚號也"(文見朱序,這個記錄與通常所說"字壬叔,號秋紉"有別,謹錄以備考)。"秋紉",語出《離騷》"紉秋蘭以爲佩",取意仍在"蘭"字。詩人以蘭蕙自喻,擢秀馨香,品質高潔,在七律"蘭"中有這樣的自白:

滋蘭樹蕙咏離騷,不詡含馨在九皋。擢秀宜爲詩客佩,聞香恍與善人遭。
臨風弱態情無限,避世孤芳品自高。相對怡然同臭味,遣愁何待酌春醪。

李善蘭的青年時代,正值鴉片戰爭前後,清廷的腐敗、侵略軍的殘暴和人民遭受的深重災難,在他的心中留下了慘痛的印象。有一篇"乍浦行",是叙事詩,與其他吟誦之作格調迥異:

壬寅四月夷船來,海塘不守城門開,官兵畏死作鼠竄,百姓號哭聲如雷。
夷人好殺攻用火,飛炮轟擊千家灰。牽妻攜兒出門走,日月無光慘塵埃。
黑面夷奴性貪淫,網收珠玉羅裙釵。飽掠十日揚帆去,滿城尸骨如山堆。
朝廷養兵本衛民,臨敵不戰何爲哉!傳說將軍尤畏葸,望風脫甲先逃回。
海疆要害重鎖鑰,坐使闔城罹凶災。何況沿塘足武備,大炮嵯峨如雲排!

"壬寅"是道光二十二年(1842),這首詩記錄了鴉片戰爭末期英軍侵入離上海不遠的乍浦燒殺淫掠的事件,是年四月初九日,"夷船入乍浦,都統某公先遁,兵遂潰",演出了一場"炮聲一

* 該文系提交首屆全國數學史會議(1981.7.大連)論文。

震魂魄喪，騎馬掩耳出城走”的丑劇(見“劉烈女詩并序”)。在“夷人”蹂躪之下，生靈涂炭，“尸骨如山”。詩人聽到一位姑娘姓劉名七姑，不受凌辱，投井自殺，就專寫了一首詩表示紀念和哀悼，并尖銳抨擊了“望風脱甲”而逃的將軍，抒發了作者對清軍腐敗、“官兵畏死”的强烈憤慨。在這同一歷史事件中，爲了迎合外敵入侵，有人做了漢奸，“割民首級爭獻功”，詩人在“漢奸謡”中痛斥了這些民族敗類的罪行，表達了强烈的愛國熱忱，李善蘭在他血氣方剛的青年時代所寫下的詩篇，當然對他的一生都有一定影響。所以雖然後來他被徵入江蘇巡撫徐有壬幕中，繼爲洋務派所擢用，但是作爲一個科學家，他有憂國憂民之心，有振興科學的抱負，這和洋務派官僚，畢竟是不能等同視之的。

《聽雪軒詩存》中涉及作者生平的詩作，有一首“十二月二十八日立春是日爲余誕期”，按李氏生於嘉慶十五年(庚午)舊歷十二月二十八日，係公曆 1811 年 1 月 22 日，與李慈銘《越縵堂日記》記載爲“十二月八日”有別，這里也一并錄以備考。

又，《聽雪軒詩存》未提及光緒十四年(1888)管庭芬編、蔣學莊續编《海昌藝文志》二十四卷内《則古昔齋遺詩》一卷。兩者的内容當有不同。

李善蘭的文集《則古昔齋文抄》，汲修齋叢書十册第九，收有“陳君錫麒行狀”、“倪君經朝傳”、“蔣君杉亭傳”、“愚泉傳”諸篇，記作者友人或同里生平事迹，有涉及作者的若干佚事。末篇記一窮餓而死的勞動詩人愚泉。另附文兩篇，一爲於源“燈窗瑣話”，記《守山閣叢書》中李善蘭的“聽雪軒吟稿錄”；一爲陳其元“庸間齋筆記”，叙述李善蘭所作“星命論”内容大略。後者較爲重要。

作者陳其元“最不信星命推步之説”，“近見海寧李善蘭所作星命論，尤爲暢快”。他引述李氏的話：“術士專以五行生剋判人一生之休咎，果可信乎?!”“星命論”追溯了五行學説的原始：“五行肇見於洪範，不過言其功用而已，言其性味而已，初不言其生剋也，是干支之配五行本非古人之意矣，而謂人之一生可據此而定，是可信歟?!”李善蘭在這裡以日心説作爲論據，進行了雄辯的論證，他指出地球與五星繞日而行，地球與五星尚不相關，地球上一個人命運吉凶，怎麼就能被天上的五星所主宰呢?!接着又用類比的方法揭露宿命論者的荒誕無稽，這就象“浙江之人在浙江巡撫治下，他省巡撫與浙江無涉也，今試謂之曰：‘某巡撫移節某省與爾大吉，某巡撫移節某省與爾大凶’，有不笑其荒誕者乎！五星之推命何以異於是乎！”議論縱橫，痛快淋漓，所以陳其元説：“其論真屬透辟，足以啓發溺惑，與余所見正合”。

由此可見，“星命論”是李善蘭批判宿命論的哲學著作。這是第一次見到李氏有“星命論”的記載，也是第一次見到李氏的部分哲學論述。所惜原著全貌、是否刊刻、收於何處、著作年代等尚無從查考。但《則古昔齋文抄》總算收錄了它的文題和概略，使我們得以窺視李善蘭的哲學思想於一斑。

李善蘭對於橢圓及其應用問題的研究

馮立昇
（內蒙古師範大學科學史研究所）

牛亞華
（內蒙古醫學院學報編輯部）

李善蘭（1811—1882）是我國晚清時期最著名的數學家，他在數學的許多領域都有突出的成就。對於他的數學工作，不少學者從不同方面進行過深入研究，但是，李氏對橢圓及其應用問題的研究尚未有人做過專門論述。本文試圖補做這一工作，對李氏在這方面的研究工作做較全面的介紹和分析。

李善蘭有關橢圓的著作有三部，即《橢圓正術解》、《橢圓新術》和《橢圓拾遺》，這三部書均收入 1867 年出版的《則古昔齋算學》中。其中，前兩部書主要研究橢圓軌道運動的解算問題；後一部則匯集了李善蘭從不同角度研究橢圓問題的成果。《橢圓正術解》，祇是爲徐有壬《橢圓正術》作解釋，並不注重方法上創新。我們這里只討論後兩書的內容。

一 《橢圓新術》

《橢圓新術》主要討論橢圓軌道運動的計算問題。包括兩方面的內容，一是已知實引（真近點角）求平引（平近點角）；二是已知平引求實引。前者稱爲"以角求積"，後者稱爲"以積求角"。[1] 二者都涉及到了橢圓部分面積的計算問題。

第一術：以角求積

設 P 爲橢圓上一點（圖 1），李善蘭要解決的問題是已知實引角 $\angle PF_1A=\theta$，求相應的平引角。關鍵是要求出橢圓向徑所掃過的面積 PF_1A。

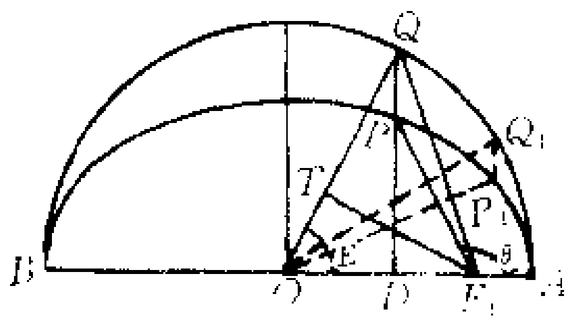


圖 1

李善蘭的具體推導過程可用現代語言表述如下：

過 P 點作 AB 的垂綫 DP，延長 DP 交輔圓於 Q 點，連接 PF_1、QF_1、OQ。李善蘭稱 $\angle PF_1A$ 爲實引角（即真近點角）；$\angle QOF_1$ 爲借積角（即現在所謂的偏近點角），用 E 表示。

根據橢圓基本定理可以推得：

$$tg\angle AF_1Q/tg\theta=a/b,\quad tg\angle AF_1Q=\frac{a}{b}tg\theta$$

即可求出 $\angle AF_1Q$。

在 $\triangle QOF_1$ 中，根據正弦定理有：

$$\frac{\sin(180^\circ-\angle AF_1Q)}{a}=\frac{\sin\angle OQF_1}{c},\qquad \sin\angle OQF_1=\frac{c}{a}\sin\angle AF_1Q$$

$\angle OQF_1$ 也可求出，那麼

$E=\angle QOF_1=180^\circ-(\angle AF_1Q+\angle OQF_1)$ 也爲已知。

又 $QD=a\sin E$，過 F_1 點作 $F_1T\perp OQ$，$\Delta QOD\backsim\Delta OTF_1$，所以：

$TF_1/QD=c/a$，$TF_1=\frac{c}{a}QD=c\sin E$

李善蘭稱 TF_1 爲積差。ΔQOF_1 的面積爲：

$$S_{\Delta QOF_1}=\frac{1}{2}aF_1T=\frac{1}{2}ac\sin E$$

那麼，輔圓上 AQO 扇形的面積與 ΔQOF_1 的面積之差就是 AQF_1 的面積，而

$S_{APF_1}/S_{AQF_1}=b/a$，　所以　$S_{APF_1}=\frac{b}{a}S_{AQF_1}$

這樣，橢圓向徑所掃過的面積 APF_1 就被求出。問題的關鍵已經解決。下面的問題是在輔圓上找出一點 Q_1 和橢圓上的相應點 P_1，使橢圓扇形面積 P_1OA 與實引面積 APF_1 相等，從而求出平引角 $M(\angle Q_1OA)$。

李善蘭截取 $\widehat{QQ_1}$ 一段弧長，使之與 TF_1 等長，這樣得到的 Q_1 點即爲所求點。因爲：

$$S_{OQQ_1}=\frac{1}{2}a\widehat{QQ_1}=\frac{1}{2}aTF_1=S_{QOF_1}$$

所以　$S_{AOQ_1}=S_{AOQ}-S_{OQQ_1}=S_{QF_1A}$（平行面積）

過 Q_1 點作 AB 的垂綫，交橢圓於 P_1 點，那麼

$$S_{AOP}=\frac{b}{a}S_{AOQ_1}=\frac{b}{a}S_{QF_1A}=S_{APF_1}$$

以上步驟，實際上是解決了橢圓向徑掃過的面積（如 APF_1）與橢圓扇形面積（如 P_1OA）的相互轉化問題。在這一術中，李善蘭給出了 M 與 E 的關係式："故已壬（TF_1）爲積差，取庚癸（QQ_1）弧綫，令與已壬等，以加減借積度甲庚（AQ）得甲癸（AQ_1）爲平引度。"即：

$$\widehat{AQ_1}=\widehat{AQ}-\widehat{QQ_1}=\widehat{AQ}-TF_1$$

其中 $\widehat{AQ_1}=aM$，　$\widehat{AQ}=aE$，所以　　$M=E-e\sin E$　$(e=\frac{c}{a})$

這就是天文學中著名的刻卜勒方程。

在李善蘭之前，《曆象考成後編》也討論過這一問題，所用方法十分繁復。[2] 後來徐有壬在其《橢圓正術》中對《後編》的方法作了改進，徐氏的方法在李善蘭《橢圓正術解》中有詳細的說明，其步驟仍然較多，不夠簡便。李氏的上述方法簡潔明了，使推導過程得到了簡化。

第二術：以積求角

這一問題是已知平引解 M 求實引角 θ，李善蘭解決這一問題時先求得借積角 E，然後由 E 求出 θ。在求 E 時他采用了級數展開的方法。根據前一術的結果：

$$aM=aE-c\sin E$$

如果令 $E_l=aE$、$M_l=aM$，他給出的級數展開式可表示爲：

$$E_l=M_l+\left(\frac{c}{a}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^3}{a^3}+\frac{c^4}{a^4}+\cdots\right)M_l-\left(\frac{c}{a^3}+\frac{4c^2}{a^4}+\frac{10c^3}{a^5}+\frac{20c^4}{a^6}+\cdots\right)\frac{M_l^3}{3!}$$

$$+\left(\frac{c}{a^5}+\frac{16c^2}{a^6}+\frac{91c^3}{a^7}+\frac{336c^4}{a^8}+\cdots\right)\frac{M_l^5}{5!}-\left(\frac{c}{a^7}+\frac{64c^2}{a^8}+\frac{820c^3}{a^9}+\frac{5440c^4}{a^{10}}+\cdots\right)\frac{M_l^7}{7!}+\cdots$$

上式中括號內的數字呈現出遞增性，李善蘭稱之爲“係數中之遞增數”。只要搞清楚了這些遞增數的變化規律，自然也就知道了級數係數出現的規律。李善蘭列出了兩張數字表，用兩種不同的方法說明了遞增數的規律。限於篇幅，這裏只介紹其中的一種方法。將李氏數表中的數字改用阿拉伯數碼書寫，并標明層(P)、行(n)和列(m)的順序，可得到表1。

表1　李善蘭的蟬聯數[$l_p(m,n)$]表

P	n \ m	0	1	2	3	4	5
1	0	1	4	9	16	25	36
	1			1	4	9	16
	2					1	4
2	0	1	16	81	256	625	1296
	1			10	80	306	832
	2					35	224
3	0	1	64	729	4096	15625	46656
	1			91	1344	8379	34048
	2					966	9408
4	0	1	256	6561	65536	390625	1679616
	1			820	21760	216036	1291264
	2					24970	360448

我們用 $lp(m,n)$ 表示上表中第 P 層第 m 列第 n 行的數，例如 $l_1(3,1)=4$，$l_3(4,2)=966$。如果用 $L_p(m)$ 表示第 p 層第 m 列數的和，那麼 $L_p(m)$ 便是前級數展開式中 $\frac{M_L^{2}}{(2P+1)!}$ 所對應括號內的遞增數。依據李善蘭的數表及其文字說明，我們可用現今計數函數的遞歸定義形式將李氏數表中的數表示出來：

定義1　(*i*)　$l_1(0,0)=1$，$l_1(m,n)\equiv 0$　(當 $m<2n$ 時)

(*ii*) $l_1(m,n)=[(m+1)-2n]^2$　(當 $m\geqslant 2n$ 時)

定義2　(*i*)　$l_2(0,0)=1$，　$l_2(m,n)\equiv 0$　(當 $m<2n$ 時)

(*ii*) $l_2(m,0)=l_1^2(m,0)=(m+1)^4$

(*iii*) $l_2(m,n)=l_1(m,n)\cdot\sum_{i=0}^{n}l_1(m,i)$　(當 $m\geqslant 2n$ 時)

一般情形下遞歸關係爲

定義　(*i*)　$l_p(0,0)=1$，　$l_p(m,n)\equiv 0$　($m<2n$ 時)

(*ii*) $l_p(m,0)=(m+1)^{2p}$

(*iii*) $l_p(m,n)=l_1(m,n)\cdot\sum_{i=0}^{n}l_{p-1}(m,i)$　(當 $m\geqslant 2n$ 時)

李善蘭完全掌握了上述遞歸關係，他後來在《級數回求》中將表1稱爲“蟬聯垛積表”[3]。我們這里將上面的遞歸關係命名爲“李善蘭遞歸鏈”。

如果知道了表1中某一層任意一列數，求和即可計算出對應的 $L_p(m)$，用公式可表示爲

$$L_p(m)=\sum_{i=0}^{[m/2]}l_p(m,i)$$

根據以上所述，可以寫出級數展開式的一般形式：

$$E_l = M_l \cdot \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{c}{a}\right)^{j-1} - \frac{M_l^3}{3!}\sum_{j=0}^{\infty}L_1(j)\frac{c^{j+1}}{a^{j+3}} + \frac{M_l^5}{5!}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}L_2(j)\frac{c^{j+1}}{a^{j+5}}$$

$$-\frac{M_l^7}{7!}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}L_3(j)\frac{c^{j+1}}{a^{j+7}} + \cdots + \frac{M_l^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}Ln(j)\frac{c^{j+1}}{a^{j+2n+1}} - \cdots$$

求出 E_l 後，由 $E=E_l/a$ 可求得 E，E 即圖 1 中的角 QOA。

求出 E 後，李善蘭進而求得實引角。由比例式 $DQ/DP=a\sin E/DP=a/b$，可求出 DP，李善蘭稱之爲橢圓正弦。又 $DA=a\,\mathrm{vers}E$，$DF_1=c+DA-a$，因 $DF_1/DP=a/a\,tg\angle PF_1D$，即 $tg(\pi-\theta)=DF_1/DP$，由此李善蘭求得實引角 θ。

解決這一問題的關鍵是要由 M 解出 E，李善蘭不僅在我國首次將無窮級數方法引入橢圓軌道計算中，而且給出了求解刻卜勒方程的冪級數展開式。《橢圓新術》應用了求解這一超越方程級數表達式的結果，具體的推導過程是在《級數回求》中給出的。李善蘭先求得冪級數 $M=\sum_{i=1}^{\infty}f_i(E)$，然後用"級數回求"的方法反求出冪級數 $E=\sum_{i=1}^{\infty}F_i(M)$，即前面給出的級數展開式。這一過程中，他利用自己創立的遞歸函數 $l_i(m,n)$ 說明了級數係數的一般規律，從而得到了正確的級數展開式。李善蘭的這一工作，在中國數學史和天文學史上均屬開創性的成果。

二　《橢圓拾遺》

《橢圓拾遺》是一部關於橢圓問題的專著，其內容主要是李善蘭研究橢圓及其相關問題的一系列成果。李善蘭認爲當時由西方傳入的圓錐曲綫知識"遺義尚多"，而"橢圓爲中算家所恒用，故載爲補之，雙曲、拋物二綫可例推也"。他在吸收西方數學知識的基礎上，獨立獲得了不少研究成果，因而作《橢圓拾遺》三卷，共四十四款[4]。內容涉及橢圓性質、作圖等方面的命題，以及面積和軌道計算方面的問題。

該書卷一共有二十款，給出二十個命題，絶大多數是李善蘭獨立提出并給予證明的。

命題 1、2 對橢圓基本定理作了證明。所謂橢圓基本定理就是：橢圓與輔圓對應弦之比，等於橢圓長短軸之比。關於這一定理，李善蘭之前的數學家就已熟知并廣泛應用過，然而李氏的證明方法卻是以前所沒有的。對於橢圓與大輔圓的關係，他說："蓋平圓側視之即成橢圓，平圓諸正弦恒爲弦，側視所成橢圓諸正弦恒爲勾，成無數等勢勾股形，故比例恒同也。"對於橢圓與小輔圓之關係，他說："蓋橢圓從長徑端側視之，長徑必稍短，漸側漸短與短徑等，即成平圓矣，橢圓諸正弦恒爲弦，側視所成平圓諸正弦恒爲勾，成無數等勢勾股形，故比例恒同也。"這裏顯然使用了投影的概念，李善蘭把橢圓看作圓的投影，同時圓也可看作是橢圓的投影。用現代語言解釋就是：

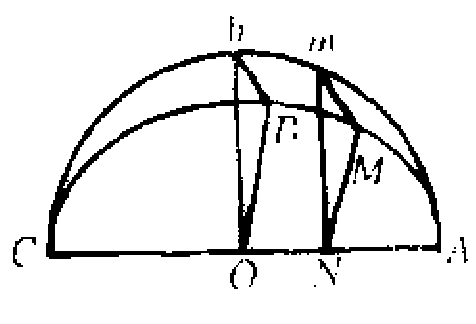


圖 2

設 AbC 爲給定圓，O 爲圓心，OA、Ob 爲互垂直徑（圖 2），ABC 爲圓的正交投影，OB 爲 Ob 之射影，m 爲圓上任意一點，M 爲其射影，顯然 $\Delta ObB \backsim \Delta mNM$，因而

$$Ob/OB = Nm/NM = a/b$$

同理可證明橢圓與小輔圓之比例式也成立。這種方法簡明易曉，其思想方法與現代的某些教科

書相一致[15]。

命題 3 是："凡橢圓斜交斜徑之正弦與斜徑上平圓之正弦比恒如半屬徑與半斜徑比。"圖 3 爲原書所載(但將原來的漢字改爲相應的英文字母)，$ACBD$ 爲橢圓，AB、CD 爲橢圓上一對共軛直徑，$ABEF$ 爲以一直徑 AB 爲直徑的圓，即所謂"斜徑上平圓"，N_1P_1、N_2P_2 爲橢圓斜徑上之正弦，顯然 $N_1P_1 // N_2P_2 // OD$；N_1Q_1、N_2Q_2 爲圓上之正弦且與 EF 平行。原命題的意思就是，若以橢圓上任一直徑爲直徑作平圓，則有：

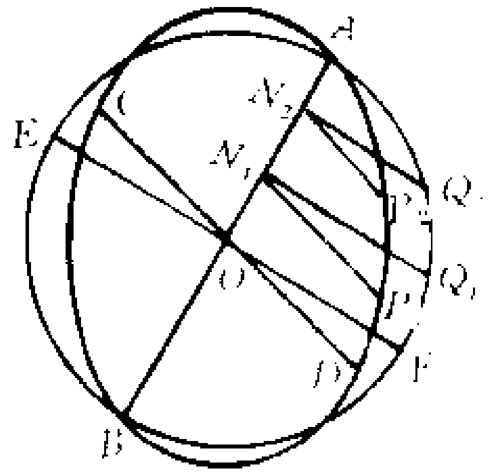


圖 3

$$\frac{N_1P_1}{N_1Q_1}=\frac{N_2P_2}{N_2Q_2}=\frac{OD}{OF}=\frac{OD}{OA}$$

在證明這一命題時，李善蘭也采用了平行投影的方法，他說："試置橢圓柱自短徑端斜截之，令成平圓面，復自長徑端斜截之，仍爲橢圓面，令二面之交綫過柱心，則交綫即斜徑，二面正弦與圓柱周諸直綫成無數等勢三角形，故比例恒同也。"這就相當於：

對於一給定橢圓 $ABCD$，任取一直徑如 AB，并以這直徑 AB 爲長軸，以給定橢圓的短軸爲短軸作一橢圓，以這個橢圓爲底面可以作一橢圓柱體。用一截面從短徑端截這一柱體，使所截得的平面恰爲一圓，而直徑等於橢柱體底面的長軸；再用一平面從長徑端截柱體并使截面爲給定之橢圓。我們作一直觀圖形，很容易説明李善蘭的方法。如圖 4，$AEBF$ 爲截橢圓柱所得圓，$ACBD$ 爲截得的橢圓，圓與橢圓兩平面之交綫爲 AB。而 AB 既是圓的直徑，也是橢圓的一條直徑，且等於橢圓柱體底面之長軸。BT、BS 分別爲過 B 點之橢圓與圓的切綫。CD、EF 分別爲直徑 AB 在橢圓與圓上的共軛直徑。NP、NQ 分別爲橢圓與圓上 AB 直徑的正弦。根據定義，顯然有：$NP // OD // BT$，$NQ // OF // BS$。連接 DF、PQ，這兩直綫段均爲柱面母綫的一段，即 $PQ // DF$，那麽 $\angle DOF=\angle PNQ=\angle TBS$，$\angle NPQ=\angle ODF$，不難看出：$\Delta DOF \backsim \Delta PNQ$

因而有：$OD/OF=NP/NQ$

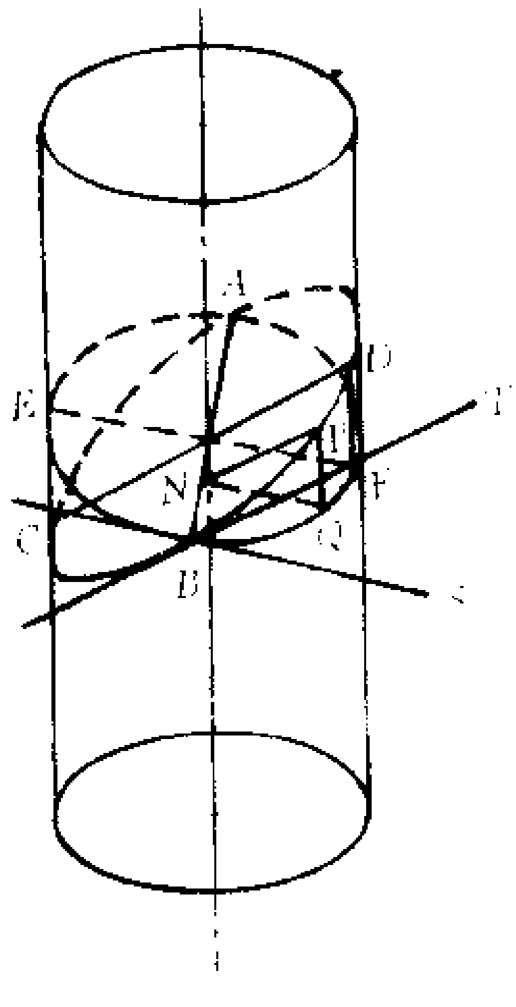


圖 4

事實上，可以把圓 $AEBF$ 看作是橢圓 $ACBD$ 的投影(或反之)，那麽 OF、NQ 就是 OD 與 NP 的射影。我們能夠在橢圓直徑 AB 上作一系列正弦 N_1P_1、N_2P_2、…、N_iP_i，就可在圓所在的平面上找到一系列相應的投影 N_1Q_1、N_2Q_2、…、N_iQ_i，顯然有

$$\Delta ODF \backsim \Delta N_1P_1Q_1 \backsim \Delta N_2P_2Q_2 \backsim \Delta N_iP_iQ_i$$

所以：$\dfrac{OD}{OF}=\dfrac{N_1P_1}{N_1Q_1}=\dfrac{N_2P_2}{N_2Q_2}=\cdots=\dfrac{N_iP_i}{N_iQ_i}$

此命題給出了一條新的定理，這定理未見於以前的文字，是李善蘭獨立提出的。它實質上

是把橢圓基本定理推廣到了更一般的情形，現在橢圓基本定理僅是這一定理的一個特例。李善蘭的方法也是以前沒有的，他的這種獨創精神十分可貴。

李善蘭把命題 3 的結論作爲一個基本定理使用，又推出了一些新的結果。

命題 4 證明橢圓與輔圓的面積關係爲：

$$\frac{\text{橢圓面積}}{\text{大輔圓面積}}=\frac{\text{橢圓短半軸}}{\text{橢圓長半軸}}=\frac{\text{橢圓外切長方形面積}}{\text{輔圓外切正方形面積}}$$

$$\frac{\text{橢圓面積}}{\text{小輔圓面積}}=\frac{\text{橢圓長半軸}}{\text{橢圓短半軸}}=\frac{\text{橢圓外切長方形面積}}{\text{輔圓外切正方形面積}}$$

這兩個比例式早已有之，重要的是在命題 5 中作了推廣。

命題 5 說："橢圓與斜徑上平圓比，如屬徑股與斜徑比"。如圖 5，CD 與 EF 爲橢圓上的兩條共軛直徑，$ABCD$ 爲以橢圓斜徑 CD 爲直徑的圓，FG 稱爲屬徑股。該命題表述爲公式即爲：

$$\frac{\text{橢圓面積}}{\text{斜徑上圓面積}}=\frac{\text{屬徑股}}{\text{斜徑}}\quad\text{或}\quad\frac{S_{橢}}{S_{圓}}=\frac{GF}{CD}$$

這一定理比命題 4 的結論有更廣泛的意義。有了這一定理，在已知橢圓任意兩共軛直徑和其方向的情況下，就可求得橢圓的面積。若上圖中 CD、EF 及其夾角 $\angle COF=\alpha$ 爲已知，那麼 $GF=EF\cdot\sin\alpha$

$$\text{橢圓面積}=\frac{GF}{CD}S_{圓}=\frac{EF\cdot\sin\alpha}{CD}\cdot\frac{1}{4}CD^2\pi=\frac{\pi}{4}CD\cdot EF\cdot\sin\alpha$$

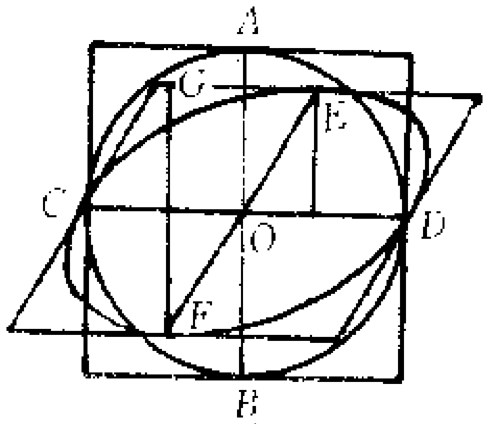


圖 5

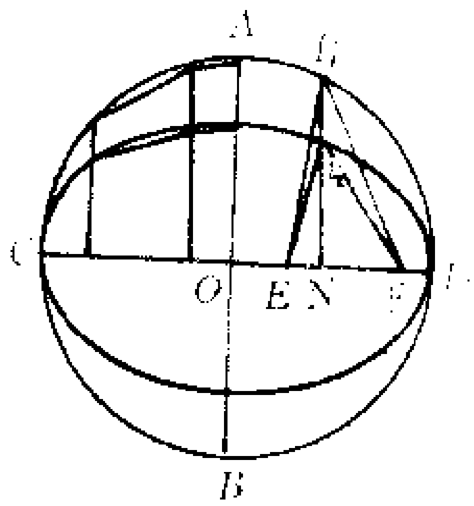


圖 6

命題 6 證明："凡橢圓與長徑上平圓二圓內所有三角形及諸邊形若同用一底，在長徑內切圓周諸角具在一個垂綫內，則其面積之比恒如短徑與長徑比"。（圖 6）

命題 7 對命題 6 作了推廣："凡橢圓及斜徑上平圓二圓內所有三角及諸邊形若同用一底，在斜徑內切圓周諸角作綫，一與屬徑平行，一正交斜徑，俱遇於斜徑內一點，則其面積之比恒如屬徑股與斜徑比。"（圖 7）這一命題的意思是，若 $P_1N\perp CD$，$P_2N\,/\!/\,AB$，那麼 $S_{\triangle EP_2F}:S_{\triangle EP_1F}=AB\cdot\sin\angle AOC/CD$，參考命題了很容易證明這一關係式。

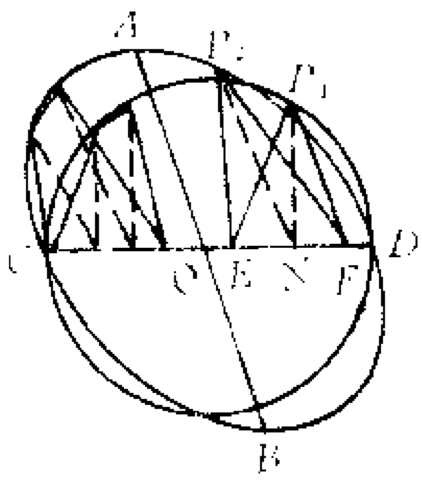


圖 7

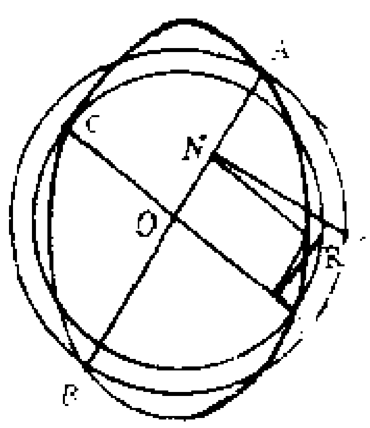


圖 8

命題 8 證明了"橢圓正交長徑之正弦與長徑上平圓正弦比，如短徑上平圓餘弦與橢圓餘弦比。"

命題9是命題8的推廣形式:"橢圓交斜徑之正弦與斜徑上平圓正弦比,如屬徑上平圓餘弦與橢圓餘弦比。"意即設 AB、CD 爲共軛直徑,NP 爲 AB 的正弦,MP 爲 CD 的餘弦,NQ、NR 分别爲大圓與小圓相應點的正弦和餘弦(圖8),則:

$$\frac{NP}{NQ}=\frac{OD}{OA}=\frac{MP}{MR}$$

借助命題3即可證明這一結論。

命題12討論了橢圓規的原理,"任自橢圓周一點作綫至長徑上,令等於小半徑,則引長之至短徑,必等於大半徑"。設 P 爲橢圓上任意一點,從 P 點引直綫至長軸,交於 S 點,使 $PS=b$,延長 PS 交短軸於 W 點,本命題求證 $PW=a$(圖9)。

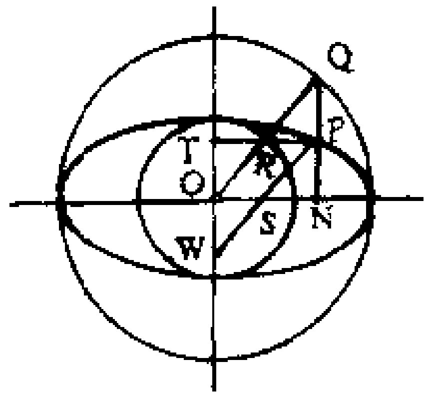


圖9

李善蘭的方法是,作橢圓的大、小輔圓,過 P 點作橢圓正弦 PN、餘弦 PT,延長 PN 交大輔圓於 Q 點,PT 交小輔圓於 R 點,顯然 $OT=PN$,$PT=ON$,而 $PN/QN=TR/TP$,故 $\Delta OTR\backsim\Delta QNO$,因爲 $PS=OR=b$,所以 $OR//PS$,$PW//OQ$,而 $OT//QN$,故 $PW=OQ=a$。

李善蘭明確指出:"用十字槽作橢圓周即此款之理也"。盡管橢圓規早在十七世紀初就已傳入我國[3],然而最早對橢圓規的數學原理進行研究的中算家卻是李善蘭。

卷一命題13以後的各題,主要討論的是與橢圓有關的一些比例關係和計算問題,這些比例關係對解決軌道計算方面的某些問題及一些特殊的作圖問題有一定價值。因這些命題推導過程比較繁復,限於篇幅,這里只介紹其中前兩個命題。

在討論這些命題之前,李善蘭先對有關概念作了說明:"大半徑減兩心差爲卑經,大半徑加兩心差的高徑,兩心各出綫遇於橢圓周爲二交徑,自遇點作正弦分長徑爲二分,爲大小二矢,二交徑內各減卑徑爲大小二徑較,以二交徑各減高徑亦爲大小二徑較"。如果設長半軸(即大半徑)爲 a,半焦距(兩心差)爲 c,則卑徑 $=a-c$,高徑 $=a+c$。二交徑是指橢圓兩個焦點與橢圓上一點的兩條連綫。

命題13證明了"大小二徑較比如大小二矢比"的關係式。在圖10中,我們用 P、N、F_1、F_2 等字母代替李善蘭原圖中的甲、乙、丙、丁等字母,其中 PF_1、PF_2 爲二交徑,BN 爲小矢,AN 爲大矢。在兩交徑上截取 $F_2E=F_2A$,截取 $F_1D=F_1B$,則 PE 與 PD 爲二徑較。此命題的關係式可表述爲

$$\frac{AN}{BN}=\frac{PE}{PD}$$

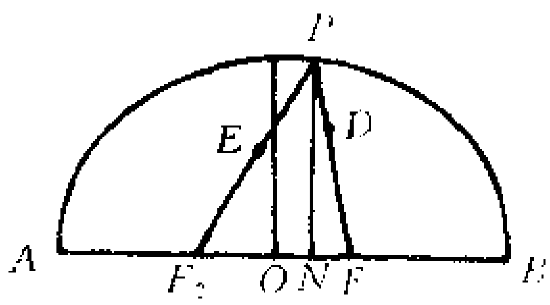


圖10

李善蘭推證的步驟如下:

先作一輔助圖形(圖11),在圖11的 ΔF_1PF_2 中找出其內切圓圓心 M,從 M 點向三邊作垂綫交三邊於 G、I、H 三點,則 $MG=MI=MH$;且 $PG=PI$,$IF_1=HF_1$,$GF_2=F_2H$

已知　$PF_1+PF_2=2a$

$F_1I+F_2G=2c$

則　$PI+PG=2a-2c=BF_1+AF_2$

而　$PI=PG$

故　$PI=BF_1=DF_1$，$PG=AF_2=EF_2$

再作 $MT /\!/ PF_1$，$MK /\!/ PF_2$，$LJ /\!/ F_1F_2$

則　$\Delta MDJ \cong \Delta MHT \backsim \Delta PNF_1$

$\Delta MGL \cong \Delta MHK \backsim \Delta PNF_2$

$JF_1=MT=MJ=TF_1$

$LF_2=MK=ML=KF_2$

又　$\Delta MKT \backsim \Delta PF_2F_1$

因而有　$\dfrac{MT+TH}{PF_1+F_1N}=\dfrac{MK+KH}{PF_2+F_2N}$

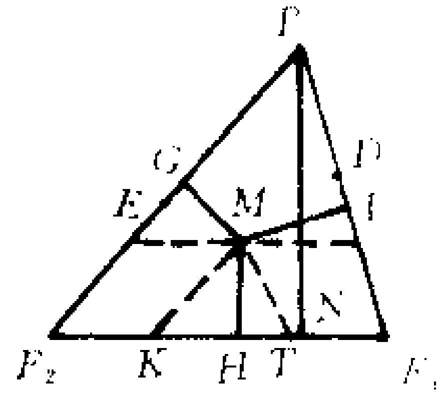


圖 11

由此得(應用比例性質)

$$\frac{IF_1}{PI+F_1N}=\frac{GF_2}{PG+F_2N}$$

所以有　$\dfrac{PD}{BN}=\dfrac{PC}{AN}$，　即 $\dfrac{AN}{BN}=\dfrac{PE}{PD}$

命題 14 爲："徑較與矢比恒如倍兩心差與長徑比"。此命題是以前一命題爲基礎的。如圖 11 所示，已知 $\Delta MKT \backsim \Delta PF_1F_2$，由相似三角形比例關係有

$$\frac{MK+KH}{PF_2+F_2N}=\frac{MK+KT+TM}{PF_2+F_2F_1+FP}$$

其中 $MK+KH=GF_2$，GF_2 與徑較 PE 相等，而 $(PF_2+F_2N)-(MK+KH)=F_2E+F_2N=AN$；又 $MK+KE+ME=F_2F_1=2c$，且 $(PF_2+F_2F_1+F_1P)-(MK+KE+ME)=PF_2-F_1P=2a$，由比例性質得

$$\frac{MK+KH}{F_2E+F_2N}=\frac{MK+KT+TM}{PF_2+F_1P}=\frac{2c}{2a}$$

即有　$\dfrac{PE}{AN}=\dfrac{2c}{2a}$

《橢圓拾遺》卷二共九款，討論了九個求焦點位置的問題，這些問題均爲已知橢圓的一個焦點及其它一些條件，用作圖法求另一個焦點。解決這類問題需要綜合應橢圓及其切綫的許多性質及幾何作圖方面的知識。下面我們以其中的 23 款、25 款和 27 款爲例介紹李善蘭的方法。

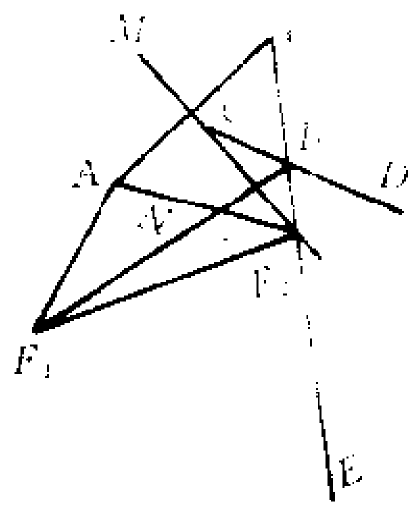


圖 12

第 23 款的問題是："有一心，有橢圓二點，其一點并知切綫，求餘一心。"如圖 12，F_1 爲已知的一個焦點，設 A、B 爲已知的橢圓周上的二點，CD 爲 B 點的切綫，此題求另一焦點 F_2 的位置。

李善蘭的具體步驟是：

(1) 連接 F_1A、F_1B，作綫段 BE，使 $\angle DBE=\angle CBF_1$。

(2) 延長 EB 綫至 G，使 $BG=F_1B-F_1A$。

(3) 連接 AG，作 AG 之垂直平分綫 MN，交 BE 於一點，這點即爲所求之焦點 F_2，而 F_1F

即爲"倍兩心差"(焦距)。

對以上過程,李善蘭作了解釋。根據橢圓切綫的性質,BE 綫必過橢圓的一個焦點,而 $AF_1+AF_2=BF_1+BF_2=2a$、$F_1B-F_1A=BG$、$F_2A-F_2B=BG=F_2G-F_2B$,故 $F_2A=F_2G$,所以 GA 綫段的垂直平分綫與 BE 綫的交點必爲橢圓的另一焦點。

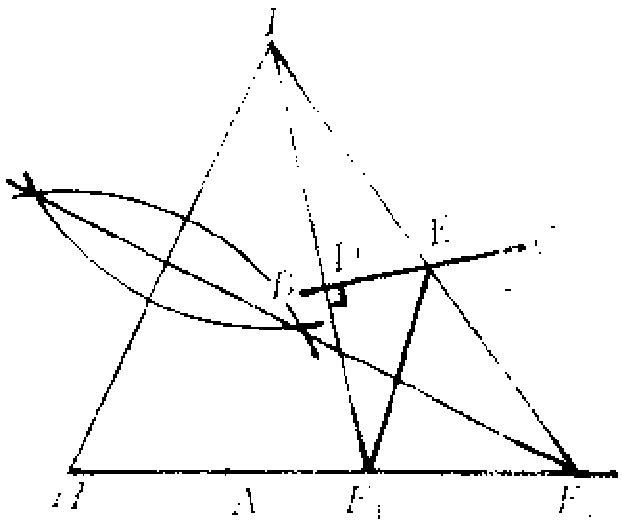


圖 13

第 25 款爲:"有一心,有最卑點,有橢圓一切綫不知切點,求餘一心。"設 F_1 爲已知的一焦點,最卑點 A 是橢圓上距 F_1 最近的一點,即橢圓長軸上的一個端點,BC 爲已知的切綫(圖 13),求另一焦點 F_2。

李善蘭的方法是:先過 F_1 點作切綫 BC 的垂綫 F_1I 與 BC 交於 D,并使 DI 與 DF_1 相等;然後作 F_1A 的延長綫 AH,使 AH 等於 AF_1;再作 HI 的垂直平分綫及 AF_1 的延長綫,二直綫的交點即爲橢圓的另一焦點 F_2。

李善蘭對他的方法進行了論證,如果 F_2 爲橢圓的另一焦點,因 $DI=F_1D$,I 與 F_2 兩點的連綫 IF_2 與 BC 交於 E 點,則 $IE=EF_1$,$\angle IED=\angle DEF_1$,E 爲橢圓上的點,$F_2I=2a$;又 $F_2H=F_2F_1+2(a-c)=2a$,所以 F_2 點必在 HI 的垂直平分綫上。實際上,I 與 H 都在以 F_2 爲圓心的準圓上,如果這兩點已知,且已知 F_2 在 AF_1 的延長綫上,則 F_2 也容易確定。

第 27 款爲:"有一心,有橢圓三切綫,俱不知切點,求餘一心。"設 AB、CD、EG 分别爲已知的三切綫,F_1 爲已知的焦點,求另一個交點 F_2(圖 14)。

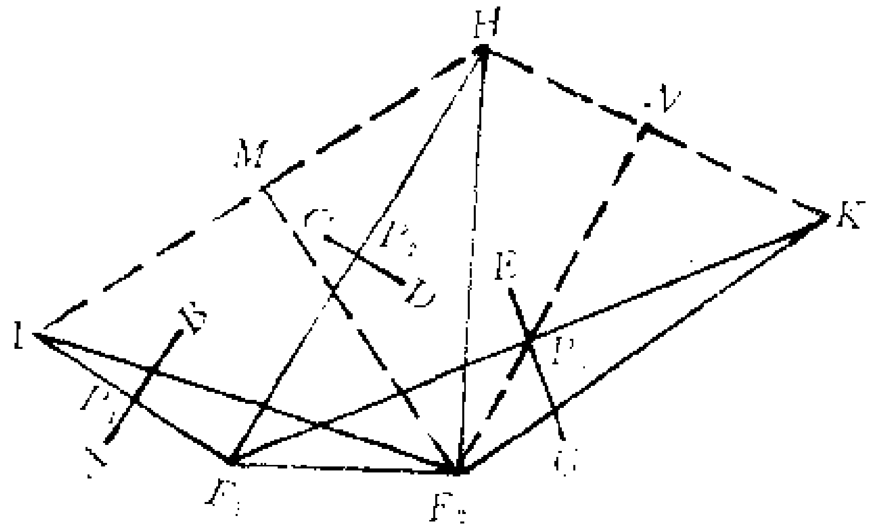


圖 14

李善蘭的求解步驟爲:過 F_1 分别作 AB、CD、EG 的垂綫 F_1I、F_1H 和 F_1K,分别交 AB、CD、EG 於 P_1、P_2、P_3 點,并且使 $IP_1=P_1F_1$,$HP_2=P_2F_1$,$KP_3=P_3F_1$;然後連接 I 與 H 點,H 與 K 點,分别作 HI 與 HK 的垂直平分綫,兩中垂綫的交點即爲焦點 F_2。

李善蘭對他的方法也作了論證。因 I、H、K 均在以另一焦點 F_2 爲圓心、橢圓長軸 $2a$ 爲半徑的圓(即橢圓的準圓)上。作 IH 與 HK 的中垂綫求交點,即由圓上"三點求心法也"。

以上是《橢圓拾遺》卷二中有代表性的三個命題,這類命題由李善蘭獨立提出,他是我國最早研究這類與圓錐曲綫有關的作圖命題的數學家。

《橢圓拾遺》卷三主要討論與橢圓軌道計算有關的一些問題,李善蘭用微積分和無窮級數方法解決了不少這方面的問題。卷三共十五款,即十五個問題。我們只介紹其中有代表性的幾例。

第 33 款給出的問題爲:"距心綫之級數爲借積度求平引面積之微分。"設 AB 爲橢圓長軸,圓 ALB 爲大輔圓,F_1、F_2 爲橢圓的兩個焦點,圓 F_1MF_2 爲過 F_1、F_2 且以焦距 C 爲直徑的圓。

設$\overset{\frown}{AQ}$爲借積度，則QJ爲平引面積（AQF_1之面積）的微分（圖15）。

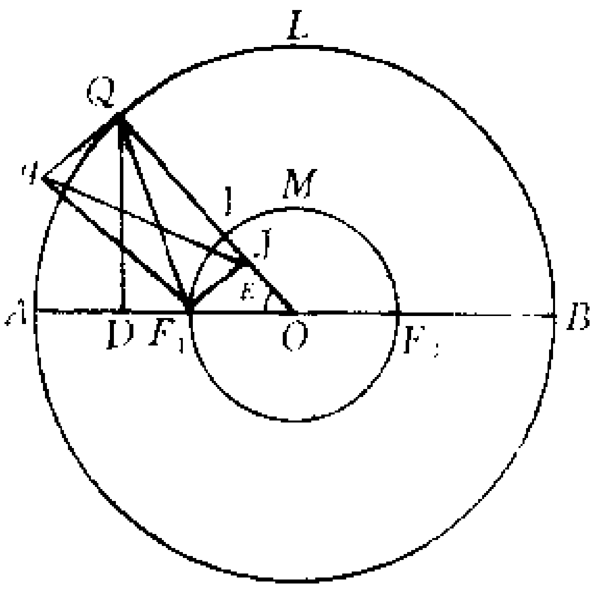


圖15

李善蘭先作大輔圓的切綫Qq與QO的垂綫F_1J，則Qq∥QO；再作QqJ與QqF二個三角形，則這兩個同底等高的三角形面積相等。如果Qq"底漸小變爲點，則切綫、弧綫合爲一"，而QqJ與QqF_1"二細三角必仍等積"。平引面積（即AQF_1之面積）爲QqF_1等"無數細三角所積而成"，令E_l爲借積度對應的弧長，則平引面積$\int\frac{1}{2}\cdot QJdE_l$，所以$QJ$爲"平引面積之微分"。

李善蘭又根據卷一第十四款推得QJ與距心綫長度（即向徑r）相等（我們略去推導過程）。因$QJ=a-c+c\cdot vers(\frac{E_l}{a})$，因此有

$$S_{平引}=\frac{1}{2}\int_0^{E_l}r(E_l)dE_l=\frac{1}{2}\int_0^{E_l}[a-c+c\cdot vers(\frac{E_l}{a})]dE$$

$$S'_{平引}=r(E_S)$$

第34款爲："有距心綫級數，求平引面積"。李善蘭的推算過程如下：

因　$a\cdot versE=\frac{E_l^2}{2!\cdot a}-\frac{E_l^4}{4!\cdot a^3}+\frac{E_l^6}{6!\cdot a^5}-\cdots$

又$r=a-c+c\cdot versE$，李善蘭推得距心綫級數：

$$r=a-c+\frac{c\cdot E_l^2}{2!\cdot a^2}-\frac{c\cdot E_l^4}{4!\cdot a^4}+\frac{c\cdot E_l^6}{6!\cdot a^6}-\cdots$$

就上式逐項積分得

$$2S_{平引}=\int r(E_l)dE_l=\int adE_l-\int cdE_l+\int\frac{CE_l^2}{2!\cdot a^2}dE_l-\int\frac{CE_l^4}{4!\cdot a^4}dE_l+\cdots$$

$$=aE_l-CE_l+\frac{CE_l^3}{3!\cdot a^2}-\frac{CE_l^5}{5!\cdot a^4}+\frac{CE_l^7}{7!\cdot a^6}-\cdots$$

因$\frac{1}{2}M_l\cdot a=S_{平引}$，李善蘭還推得

$$M_l=\frac{2S_{平引}}{a}=E_l-\frac{c}{a}\cdot E_l+\frac{CE_l^3}{3!\cdot a^3}-\frac{CE_l^5}{5!\cdot a^5}+\frac{CE_l^7}{7!\cdot a^7}-\cdots$$

而$M=M_l/a$即爲平引角。

第38款爲："有最卑後實引度求距心綫之級數。"這一問題爲已知實引角θ，要將向徑r展成θ的冪級數形式。李善蘭經過一系列推導，得到了如下結果：

$$r=(a-c)\cdot\{1+(\frac{c}{a+c})\frac{\theta_l^2}{2!\cdot a^2}+[\frac{6c^2}{(a+c)^2 6}-\frac{c}{a+c}]\frac{\theta_l^4}{4!\cdot a^4}$$

$$+[\frac{90c^3}{(a+c)^3}-\frac{30c^2}{(a+c)^2}+\frac{c}{a+c}]\frac{\theta_l^6}{6!\cdot a^6}$$

$$+[\frac{2520c^4}{(a+c)^4}-\frac{1260c^3}{(a+c)^3}+\frac{126c^2}{(a+c)^2}-\frac{c}{a+c}]\frac{\theta_l^8}{8!\cdot a^8}$$

$$+\left[\frac{113400c^5}{(a+c)^5}-\frac{75600c^4}{(a+c)^4}+\frac{13230c^3}{(a+c)^3}-\frac{510c^2}{(a+c)^2}+\frac{c}{a+c}\right]\frac{\theta_i^{10}}{10!\cdot a^{10}}$$
$$+\cdots)$$

如果令 $e=\frac{c}{a}$, $\theta=\frac{\theta_i}{a}$,我們可以將上式改寫爲如下形式:

$$r(\theta)=(a-c)+(a-c)(\frac{1}{1+e})\frac{\theta^2}{2!}+(a-c)\left[\frac{6}{(1+e)^2}-\frac{1}{1+e}\right]\frac{\theta^4}{4!}$$
$$+(a-c)\left[\frac{90}{(1+e)^3}-\frac{30}{(1+e)^2}+\frac{1}{1+e}\right]\frac{\theta^6}{6!}$$
$$+(a-c)\left[\frac{2520}{(1+e)^4}-\frac{1260}{(1+e)^3}+\frac{126}{(1+e)^2}-\frac{1}{1+e}\right]\frac{\theta^8}{8!}$$
$$+(a-c)\left[\frac{113400}{(1+e)^5}-\frac{25600}{(1+e)^4}+\frac{13230}{(1+e)^3}-\frac{510}{(1+e)^2}+\frac{1}{1+e}\right]\frac{\theta^{10}}{10!}$$
$$+\cdots+(a-c)\frac{\theta^{2k}}{(2k)!}\sum_{i=1}^{k}\frac{A_i(k)}{(1+e)^i}\cdot(-1)^{i+1}+\cdots$$

對於級數展開式的係數變化規律,李善蘭做了解釋,他用一垛積圖(圖 16)說明 $A_i(k)$ 的變化規律,即"諸係數遞增之理"。圖中"第一層爲天二(θ^2)之係數,第二層爲天四(θ^4)係數,三、四、五層爲天六(θ^6)、天八(θ^8)、天一〇(θ^{10})之係數。其遞增之法向左斜行而下,第一次六倍(二乘之又三乘之也),第二次十五倍(三乘之又五乘之也),第三次二十八倍(四乘之又七乘之也),……順是以下可類推。向右斜行而下,第一行遞一倍(不變也),第二行遞四倍(二自乘也),第三行遞九倍(三自乘也),第四行遞十六倍(四自乘也),……順是以下可類推。設欲求某數必先有本數上層之左右二數,左數向右斜行、右數向左斜行各依法倍之,并二倍數即本數。"如果用 n 表示圖中左斜而下的行次,m 表示右斜而下的行次,k 表示垛的層次,根據李善蘭的圖表及文字說明可得到下面的遞歸關係:

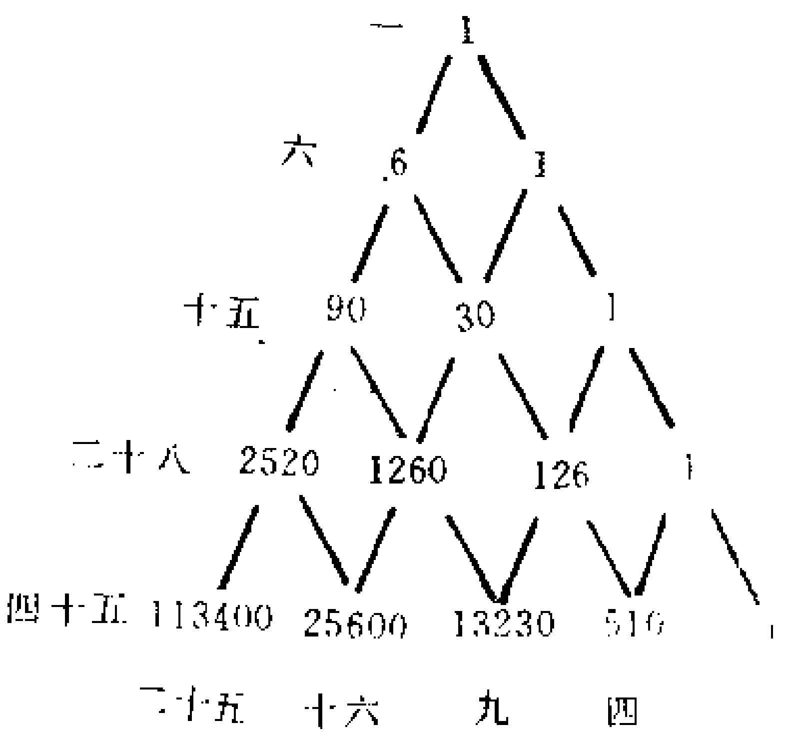


圖 16

定義　(i) $A_1^m=1$　　(ii) $A_n^1=n(2n-1)A_{n-1}^1$　$(n>1)$

(iii) $A_n^m=2^m\cdot A_n^{m-1}+n(2n-1)A_n^m$,　$(m\geq2, n\geq2)$

而 $A_i(k)=A_{k-i+1}^i$,當 $k\geq2$ 時 $A_i(k)=2^i\cdot A_{k-i+1}^{i-1}+(k-i+1)(2k-2i+1)\cdot A_k^i$

橢圓的極坐標方程(即橢圓軌道方程)爲:

$$r=\frac{(a-c)e}{1+e\cdot cos\theta}$$

在橢圓運動計算中，向徑即是極徑 r，實引角（真近點角）即極角 θ。李善蘭的結果相當於給出了上式對 θ 的冪級數展開式。

第 40 款給出了由實引角（真近點角）求平引角（平近點角）之級數，李善蘭的結果可以整理爲下面的形式：

$$
\begin{aligned}
M = & \frac{(1-e)^2}{b} + \frac{(1-e)^2}{b}\cdot\left(\frac{2}{1+e}\right)\frac{\theta^3}{3!} + \frac{(1-e)^2}{b}\left[\frac{3\times 6}{(1+e)^2} - \frac{2}{1+e}\right]\frac{\theta^5}{5!} \\
& + \frac{(1-e)^2}{b}\left[\frac{4\times 90}{(1+e)^3} - \frac{3\times 30}{(1+e)^2} + \frac{2}{1+e}\right]\frac{\theta^7}{7!} \\
& + \frac{(1-e)^2}{b}\left[\frac{5\times 2520}{(1+e)^4} - \frac{4\times 1260}{(1+e)^3} + \frac{3\times 126}{(1+e)^2} + \frac{2}{1+e}\right]\frac{\theta^9}{9!} \\
& + \frac{(1-e)^2}{b}\left[\frac{6\times 113400}{(1+e)^5} - \frac{5\times 25600}{(1+e)^4} + \frac{4\times 13230}{(1+e)^3} - \frac{3\times 510}{(1+e)^2}\right. \\
& \left. + \frac{2}{1+e}\right]\frac{\theta^{11}}{11!} + \cdots \\
& + \frac{(1-e)^2}{b}\cdot\frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{(1+i)A_i(k)}{(1+e)^i}(-1)^{i+1} + \cdots
\end{aligned}
$$

第三第 35 款："有借積度求平引之級數，即可得平引度求借積度之級數"此款結果即刻卜勒方程 $M=E-e\sin E$ 關於 E 的解，前面在討論《橢圓新術》"以積求角"術時已作過介紹。卷三第 43 款爲："有實引度求平引度之級數，即可推得平引度求實引度之級數。法詳《級數回求》。"李善蘭認爲，用級數回求的方法可由第 40 款的結果推得平近點角（M）表達真近點角（θ）的級數展開式。

在近代天體力學中，爲了滿足研究天體運動的需要，要求把橢圓軌道中的坐標及其一些函數展開成無窮級數。李善蘭在不了解當時西方科學家工作的情況下，獨立進行了有關橢圓運動級數展開方面的工作。他綜合應用幾何學、三角學、無窮級數以及微積分等知識解決了一系列與橢圓有關的數學問題，顯示了很高的數學才能。李善蘭獲得的結果都是帶有獨創性的成果，他的上述工作在中國近代數學史和天文學史上都占有一定地位。

參　考　文　獻

[1] 李善蘭．《橢圓新術》，《則古昔齋算學》卷八。

[2] 牛亞華．"明末清初橢圓知識的傳入及應用"，《數學史研究文集》第一輯，內蒙古大學出版社與臺灣九章出版社，1990，104—116。

[3] 李善蘭．《級數回求》，《則古昔齋算學》卷十二。

[4] 李善蘭．《橢圓拾遺》卷一、卷二、卷三，《則古昔齋算學》卷九上、中、下。

[5] 阿達瑪著、朱德祥譯，《幾何・立體部分》上海科學技術出版社，1980，167－168。

黃宗憲對孫子定理和求一術的預備性證明

李文銘
(陝西師範大學數學系)

南北朝時,《孫子算經》卷下第26問“物不知數”是一個一次同餘式組的不定分析問題,其解法具有一般性,被稱爲“孫子定理”或“中國剩餘定理”。南宋著名數學家秦九韶(1202—1261)對它作了進一步的推廣,把模數兩兩互素的條件放寬到模數任意的情形,並提出一般一次同餘式組求解程序,其核心就是秦九韶創立的“大衍求一術”。

孫子定理和大衍求一術是中國數學史上頗具影響的兩項數學成就,其解題過程充分體現了“寓理於算”的特點,因此,後世學者盡管不斷應用或研究孫子定理和求一術,但從不懷疑其解法的正確性。然而,數學要求對所有的定理、公式和方法進行嚴密的邏輯證明。那麼,保證孫子定理和求一術正確性的數學證明,在我國是什麼時候由誰首先給出來的?迄今尚未見有專文探討這一問題。本文擬對清代黃宗憲的《求一術通解》部分內容作一介紹和解釋,說明上述工作是由黃宗憲首先開始的。

黃宗憲,字玉屏,號小谷,湖南新化人。他主要活動於1871年到1896年間,是長沙丁取忠的高足弟子。丁取忠主編的《白芙堂算學叢書》二十三種主要由他負責校訂工作。1877年冬曾作爲第一任駐英大使郭嵩燾的隨員出使英國。

黃宗憲1873年完成的《求一術通解》(簡稱《通解》),是研究秦九韶的“大衍求一術”的專著。該書在求“定母”時採用了素因子分解的先進方法,改進了秦氏的解法、創造了若干新的解法,此外,還對孫子定理和求一術作出了預備性的、亦即初步的證明。

黃宗憲認爲,孫子定理問世千年來,大衍術問世幾百年來,許多研究者“僅識其當然,而於所以然終闕如”,因此有必要闡明兩者之所以成立的道理。

一、對孫子定理的“證明”

評價黃宗憲的工作之前,先引述現在數論對孫子定理的證明,作爲比較的標準。

孫子定理:任給一組正整數 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant 2)$ 滿足 $(a_i,a_j)=1(i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n)$,令 $M=a_1a_2\cdots a_n$,$M_i=\frac{M}{a_i}(i=1,2,\cdots,n)$,則滿足 $N\equiv R_i(\mathrm{mod}\ a_i)$ 的公解只有一個:

$$N\equiv k_1M_1R_1+k_2M_2R_2+\cdots+k_nM_nR_n(mod\ M)$$

其中 k_i 滿足 $k_iM_i\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ a_i)\quad (i=1,2,\cdots,n)$

證明 1) $\because (a_i,a_j)=1$, $\therefore (a_i,M_i)=1$,且 $a_j|M_i(i=1,2,\cdots,n.\ j\neq i)$;

2) 由 $(a_i,M_i)=1$,知,必有 k_i 使 $k_iM_i\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ a_i)\ (i=1,2,\ \cdots,n)$;

3）由 $a_i \mid M_i$及上式可得：$k_iM_iR_i \equiv R_i \pmod{a_i}$，$k_iM_iR_i \equiv 0 \pmod{a_j}$；

4）令 $\overline{N} = k_1M_1R_1 + k_2M_2R_2 + \cdots + k_nM_nR_n$，則 $\overline{N} \equiv k_iM_iR_i \equiv R_i \pmod{a_i}$，即 $\overline{N}$ 滿足題設中給出的同餘式組 $N \equiv R_i \pmod{a_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$；

5）如果還有 S 也滿足該同餘式組，則 $\overline{N} \equiv S \pmod{a_i}$ 或　$a_i \mid (\overline{N} - S)$，∵ $(a_i, a_j) = 1$，∴ $M \mid (\overline{N} - S)$，即 $\overline{N} \equiv S \pmod{M}$。因此，$N \equiv \overline{N} \pmod{M}$是所求的唯一公解。（證完）

孫子定理與大衍總數術的主要區別，在於前者要求模數兩兩互素。因此，它是後者的特例，即後者從第二步開始，以所求得的兩兩互素的定母爲模數的情形。此處之後，秦術以及黄宗憲的方法都是以孫子定理爲根據的。在取兩兩互素的定母爲模數時，他們給出的題設條件和結論與孫子定理的完全一致，因此，下文將對照孫子定理的證明步驟，逐條説明黄宗憲的證明思想：

1）“衍數爲餘定連乘所得，必爲餘定度盡之數；而諸定皆無等，故獨爲本定度不盡。”

《通解》稱 M 爲“衍母”，M_i 爲“衍數”，$a_i(i = 1, 2, \cdots, n)$爲“定母”或簡稱“定”。對於任 i，a_i是“本定”，a_j 是“餘定”$(j = 1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n)$，“等”表示公因數，“諸定皆無等”即所有定母兩兩互素，“度盡”表示整除。上述引文用現代數學符號解釋就是：

∵ $M_i = \dfrac{M}{a_i} = a_1a_2\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_n$，∴ $a_j \mid M_i (j \neq i)$，又 ∵ $(a_i, a_j) = 1$，∴ $a_i \nmid M_i (i = 1, 2, \cdots, n)$

原文没有指明$(a_i, M_i) = 1$，只説“有此餘定可度盡，而本定度不盡之衍數，然後馭題有把握矣。”由於衍數 M_i 爲餘定的連乘積，而諸定母皆無公因數，故定母 a_i 與衍數 M_i 互素是顯而易見的。否則，求一術將無法施行，“然後馭題有把握”就是一句空話。

2）“求定母亦無深理，是必使各行皆無等，方可爲求一之用。”

這就是説，必須使各行定母互素，從而保證了$(a_i, M_i) = 1$，方能使求一術得以實現。即存在 k_i，使得 $k_iM_i \equiv 1 \pmod{a_i}$ 成立。

3）“凡置一個用數爲實，以本位定母累減必餘一，以他位定母累減必無餘；若置兩個用數爲實，以本位定母累減必餘二，以他位定母累減，亦必無餘；由是推之，三個用數以往，無不皆然。以剩數乘用數爲總者，是倍用數中之餘一與剩數等，仍爲他定所度盡也。”

《通解》稱 k_iM_i 爲“用數”，R_i 爲“剩數”，稱 $k_iM_iR_i$ 爲“總數”或簡稱“總”。上述引文的意思是：∵ $k_iM_i \equiv 1 \pmod{a_i}$，且 $k_iM_i \equiv 0 \pmod{a_j}$，∴ $2k_iM_i \equiv 2 \pmod{a_i}$，且 $2k_iM_i \equiv 0 \pmod{a_j}$。同理：$3k_iM_i \equiv 3 \pmod{a_i}$，且 $3k_iM_i \equiv 0 \pmod{a_j}$，……，$R_ik_iM_i \equiv R_i \pmod{a_i}$，且 $R_ik_iM_i \equiv 0 \pmod{a_j}$。

4）這一步驟《通解》是用例題來説明的，例中 n＝4，而 $R_1 = R_2 = 0$，所以總數$(k_iM_iR_i)$只有兩項：“以二總併之者，是合二剩數歸一數中矣。”即取

$$\overline{N} = k_1M_1R_1 + k_2M_2R_2 + \cdots + k_nM_nR_n$$

由於 3)中結論的保證，$\overline{N}$ 顯然“與題旨合”，即 $\overline{N} \equiv R_i \pmod{a_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$

5）“滿衍母去之者，衍母中所涵之數循環相同，每減一次，仍合題旨。故首云答數無窮，即其理也。”（《通解》在例言中曾指出：同餘式組“答數無窮”）

前面得到的 $\overline{N}$ 還不是同餘式組的唯一解，因爲衍母 $M = a_1a_2\cdots a_n$，所以 $\overline{N}$ 減去（或加上）M 的任意倍數後，仍然是原同餘式組的解，即所謂“答數無窮”，其公解形式爲 $\overline{N} \pm pM$（p 爲任意正整數）　或　$N \equiv \overline{N} \pmod{M}$。

根據黄宗憲的規定，N 一般取滿足上式的最小正整數，并稱之爲"初答"。

《通解》探討孫子定理成立的道理叙述至此。原著缺少對公解唯一性的分析。

二、對求一術的"證明"

黄宗憲的求一術與秦九韶的求一術實質上一致，僅形式上略有不同。所謂"求一"，就是對某 i 行中的定母 a_i 和衍數 M_i，求出正整數 k_i，滿足同餘式 $k_iM_i \equiv 1 \pmod{a_i}$。$k_i$ 稱爲"乘率"，因此"求一"即求乘率。

《通解》是這樣求乘率的："列定母於右行，列衍數於左行(左角上預寄一數)，輾轉累減(凡定母與衍數輾轉累減，則其上所寄數必輾轉累加)。至衍數餘一即止，視左角上寄數爲乘率。"

爲簡化表達本文省略 M_i, a_i, k_i 的下標 i，用 M，a，k 表示一般的衍數、定母和乘率。設 $M = r_1$，其左角寄數 $h_1 = 1$；$a = r_2$，其右角寄數 $h_2 = 0$。有了以上初值，我們可以給出餘數和寄數的一般表達式：

$$\begin{cases} r_i = r_{i-2} - q_{i-2}r_{i-1} & (1 \leqslant r_i < r_{i-1}) \quad (1) \\ h_i = h_{i-2} + q_{i-2}h_{i-1} & (i = 3,4,5,\cdots) \quad (2) \end{cases}$$

(1)式即"定母與衍數輾轉累減"，(2)式即"所寄數必輾轉累加"。關於上述兩個遞推公式，原文中還有一段説明：

"兩數相減，必以少數(r_{i-1})爲法，多數(r_{i-2})爲實，……其法上實上俱有寄數者，視累減若干次(q_{i-2})，以法上寄數(h_{i-2})亦累加若干次於實上寄數中($h_{i-2}+q_{i-2}h_{i-1}$)，即得減餘數(r_i)上之寄數(h_i)矣。"

這段話清楚地表明了以上兩個遞推公式的形式。當 i 爲奇數時，r_i 是衍數的餘數；i 爲偶數時，r_i 便是定母的餘數。在列出求乘率的算式中，i 的奇偶性是由 r_i 所處的左右行位置來區别的。當 i 爲奇數，且 $r_i = 1$ 時，則 r_i 左角上的寄數 h_i 即爲所要求的乘率 k。

我們以《通解》援引《數書九章・大衍類》中"推計土功"這個題目里的一項數據爲例，演示求一術的算法。這里給出的衍數 M＝3800，定母 a＝27，用求一術得到的乘率 k＝23。其算式如下：

寄數(左角)	衍數	定母	寄數(右角)
1	3800	27	0
	(140×27＝) 3780	20(＝1×20)	
(1＋140×0＝) 1	20	7	1(＝0＋1×1)
	(2×7＝) 14	6(＝1×6)	
(1＋2×1＝) 3	6	1	4 (＝1＋1×3)
	(5×1＝) 5		
(3＋5×4＝) 23	1		

“左行餘一即止，其左角寄數二十三爲乘率。”

證明求一術，即要證明由上述遞推公式求得的 k 滿足同餘式 $kM \equiv 1 \pmod{a}$。

黄宗憲的“證明”，即用文字解釋了上述實例。求乘率的問題，就是要求出有多少個衍數 M 被定母 a 累減，其餘數爲 1 的問題；黄氏所設寄數 h_i，是在 M 和 a 輾轉互減過程中，當左行餘數 r_i（i 爲奇數）爲 1 時取作乘率 k 的。因此，黄氏在“證明”求一術之前首先指出：“求一者，是求衍數中之一，所以，寄數只記衍數之次數。”（以下引文里出現的阿拉伯數字，原文均爲籌式數碼）

初值：$r_1 = M = 3800$，$r_2 = a = 27$，$h_1 = 1$，$h_2 = 0$。

“其首層餘 20，是以若干個定母減一個衍數之所餘也，故餘數上角寄一數”；	$1 \times 3800 \equiv 20 \pmod{27}$ $r_3 = 20 \quad h_3 = 1$
“第二層餘 7，是以一個衍數減若干個定母之所餘也，故餘數上角寄一數”；	$1 \times 3800 \equiv -7 \pmod{27}$ $r_4 = 7 \quad h_4 = 1$
“第三層餘 6，是以若干個定母減三個衍數之所餘也，故餘數上角寄三數”；	$3 \times 3800 \equiv 6 \pmod{27}$ $r_5 = 6 \quad h_5 = 3$
“第四層餘 1，是以四個衍數減若干個定母之所餘也，故餘數上角寄四數”；	$4 \times 3800 \equiv -1 \pmod{27}$ $r_6 = 1 \quad h_6 = 4$
“第五層餘 1，是以若干個定母減二十三個衍數之所餘也，故餘數上角寄二十三數”；	$23 \times 3800 \equiv 1 \pmod{27}$ $r_7 = 1 \quad h_7 = 23$
“其衍數至此已得一，故以二十三爲乘率”。	$\because r_7 = 1$ $\therefore k = h_7 = 23$

這是對具體數例採用歸納方法説明問題的過程。因爲求餘數與求寄數的遞推公式

$$\begin{cases} r_i = r_{i-2} - q_{i-2} r_{i-1} & (1 \leqslant r_i < r_{i-1}) \\ h_i = h_{i-2} + q_{i-2} h_{i-1} & (i = 3, 4, 5, \cdots) \end{cases}$$

爲黄宗憲所熟知，所以，如果用代數式來表示，上述歸納過程意義是：

$r_3 = r_1 - q_1 r_2 = M - q_1 a = h_3 M - f_3 a$	$h_3 = h_1 + q_1 h_2 = 1$，$f_3 = q_1$。
$r_4 = r_2 - q_2 r_3 = a - q_2(h_3 M - f_3 a)$ $= (1 + q_2 f_3)a - q_3 h_3 M = f_4 a - h_4 M$	$h_4 = h_2 + q_2 h_3 = q_2 h_3$， $f_4 = 1 + q_2 f_3$
$r_5 = r_3 - q_3 r_4 = (h_3 M - f_3 a) - q_3(f_4 a - h_4 M)$ $= (h_3 + q_3 h_4)M - (f_3 + q_3 f_4)a$ $= h_5 M - f_5 a$	$h_5 = h_3 + q_3 h_4$， $f_5 = f_3 + q_3 f_4$。
……	……
$r_i = (-1)^i \cdot (f_i a - h_i M)$	$h_i = h_{i-2} + q_{i-2} h_{i-1}$ $f_i = f_{i-2} + q_{i-2} f_{i-1}$

左端最後得到的這個一般表達式，是定母與衍數在輾轉互減過程中，它們與餘數之間一個具有規律性的表達式，由於黃氏明確指出過，在這一關係式中只知衍數參加運算的次數(即衍數的個數)h_i，而f_i(定母的個數)一般是不需要知道的(原文只籠統地說"若干個定母……")，因此上式又可以寫成

$$h_iM \equiv (-1)^{i-1}r_i \pmod a$$

的形式。"至衍數餘一即止，視左角上寄數爲乘率。"即當 i 爲奇數，且 $r_i=1$ 時，取 $h_i=k$，則有：$kM \equiv 1 \pmod a$　由此，便得到所要證明的結果。

根據以上對《通解》原文中數學意義的分析和解釋，可以看出，黃宗憲已經掌握了證明孫子定理和求一術所需要的理論知識；他用實例試圖說明上述二定理結論正確，其過程已經指出了一條證明思路，只要把他的敘述譯成數學語言，便可以得到符合邏輯的數學證明。遺憾的是，受到傳統數學表述方式的限制，黃宗憲本人沒有給出這種證明的形式，因此，他所做出的努力可以稱爲"預備性"證明。

到19世紀後半葉，西方數學已陸續傳入我國，按理說，黃宗憲已有可能作出嚴格數學證明。然而，他未能做到這一點，或者因他對西方數學持保守態度，或者因"地僻不能得書"，或者因還沒學到可以運用自如的程度。黃宗憲於1871年拜丁取忠爲師，"其學始進"，1873年即寫成《通解》。這些都說明，傳播、學習和掌握外來科學知識需要有一個過程。《通解》的上述證明思想尚不成熟、完整，缺乏明確的證明意識。盡管如此，黃宗憲在說理方面做出的努力和取得的成績，促進了使傳統數學理論向嚴密化方向發展，也是對我國古代同餘式組理論的一項貢獻。

白尚恕先生對本文提出過修改意見，在此表示感謝。

參考文獻

[1] 錢寶琮：《中國數學史》，科學出版社，1964年。
[2] 張德馨：《整數論》，第一卷，科學出版社，1958年。

清末數學家與數學教育家劉彝程

田 淼

（天津師範大學數學系）

劉彝程是清朝末年一位重要的數學家與數學教育家。本文借助一些新史料，試對其生平活動和重要數學工作做一簡單介紹。

一 生平活動

劉彝程，字省庵。江蘇興化人，太學生。

劉氏家族世以耕讀傳家，曾祖銓，祖父松齡，父熙載，母宗氏。劉彝程兄弟三人，姐妹兩人。彝程居長，次殿程，光緒元年恩科舉人。三尊程，縣學生[1]。

劉熙載(1813--1881)，字伯簡，一字融齋。道光十九年中舉，二十四年成進士。同治三年(1864)被任命爲廣東學政。同治五年(1866)引疾歸，至上海任教於龍門書院，十四年後謝世。劉熙載博學多才，"上自六經、子、史、天文算法、字學、韵學"，"下至詞曲及仙釋家言"，靡不通曉。平生著述甚豐[1]。其唯一傳世的數學著作爲收錄於《昨非集》中的"天元正負歌"[2]。

劉彝程一生致力於數學研究與教學。關於他的傳記材料很少，只在《興化縣續志》中有一約四百字的傳略。至今我們仍無法得知其生卒的確切年代。據其經歷及其父的生平年代推算，可知其生活時代應在1835年左右至本世紀初。劉彝程自幼性格沉靜，善於思考。雖受家庭熏陶，且曾入太學，卻對仕途科舉及經史文章不感興趣，而一心鑽研實用之學[3]。劉熙載對此曾深以爲憾，與蕭穆談及，說："察見淵魚不詳"[4]。但劉熙載畢竟是一位通達的學者，到劉彝程青年時期，便授之以"天元正負歌"。天元正負歌是一啓蒙性數學歌訣。主要講解加、減、乘、除、開方、乘方運算中的正負號變换，通俗易懂，且便於記憶[2]。劉彝程由此對數學產生了濃厚的興趣，"縱觀天元、四元諸書"，但苦於參考資料太少。同治三年，劉彝程隨侍其父赴粵，途中於長沙結識了當時著名數學家丁取忠，並於丁處看到董祐誠、項名達、戴煦、徐有壬等人的著作，"驚爲得未曾有"。後又於廣東拜訪了鄒伯奇。同治五年，劉熙載托病在滬，彝程又借此結識了李善蘭。自此，他悉心於弧矢級數之學。這些交往成爲劉氏數學生涯的轉折點，使他由一個數學學習者一躍而成爲一名研究者。雖然當時他并未得到多少驚人成就，但這畢竟使他接觸了當時最先進的數學成果，並也嘗試着進行創造。不數年，自撰著《割圜闡率》(一卷)、《開方闡率》、《對數問答》(一卷)"。丁取忠曾有意將這些著作收入《白芙堂算學叢書》，但後來以資罄寄還，均未刊刻。[1][3][4]

1873年，英國學者傅蘭雅與華蘅芳翻譯《代數術》一書。此時代數學初入我國，"無敢任校算者"。彝程一見了然，爲之校算，并由此與傅蘭雅結爲至交[5]。此爲劉代數學工作中的一重要

事件,使其對傳入的西方數學,尤其是代數學有較多了解,爲其後期融貫中西的數學成就打下了基礎。同年(1873)馮焌光慕名邀劉彝程任上海廣方言館算學教習。1875年,馮代捐資創辦求志書院,遂延劉代兼任求志書院算學齋齋長。自1876年開課至1898年以老病辭職,劉氏在該書院任教共二十二年。此間自撰《上海求志書院算學課藝》一卷(1898年上海石印),並與沈善蒸合编《廣方言館算學課藝》。辭職後,劉氏搜集歷年於求志書院所出課題與自演之稿,以年代爲序编爲《簡易庵算稿》四卷,於1900年由江南制造局刊刻傳世。除上述著作外,劉氏還有兩部著作,一爲《亥加人開立方解證》,一爲與沈善蒸合编之《方程九章算略》[5]。

縱觀劉彝程一生,對他影響最大的當屬其父劉熙載。雖因劉彝程未步其後塵成爲一博學大儒,曾使劉熙載深爲失望。但他畢竟是劉彝程數學啓蒙教師,並爲其創造條件接觸當時著名的數學家及數學著作。而劉熙載棄高官而就教育,淡泊爲生的生活準則,博採衆長,不囿於門户的學術思想,乃至其循循善誘、導難以易的教育風格,都對劉彝程有着深刻的影響。其弟子徐謙稱之:"不以艱深自文,不以蘊蓄自密,誨人唯恐不知,語人不厭其詳"[6]。劉氏自己也說:"余之命題,無論深淺,唯以新穎確實爲主,蓋凡一物一理,驟觀之了無趣。及觸類旁通,引伸不已。"[4]從《簡易庵算稿》亦可看出,其數學注重於啓發。即使是會考試題,也堅持使學生先明題理,重在授人以知識,而不在以難題檢驗。用劉氏自己話說:"往往先抒公理,然後以題合之,遂纂如石投水,簡易明顯"。其置考題,往往將一道難題分爲若干小題,使學生掌握新知識有了階梯。且經常可見"前題又法"。每次力求深入,使學者於不知不覺中得到收益。表現出一個教育家成熟的教育思想。當然,這與平時耳濡目染,受教於其父是分不開的。

清朝末年,一方面西方數學大量涌入,對中國傳統數學進行着無情的冲擊。另一方面中國數學經過乾嘉時期的復興,宋元時期傑出數學著作已再度爲數學家們研究,並出現了許多新成果。從當時數學家的觀點來看,有的認識到西方數學的優越性,而拋棄傳統數學;有的自認天朝大國,而貶西算爲蠻夷之學,西學東源之說廣泛流傳。但劉彝程一直非常客觀地看待這兩種傳統不同的數學。在書寫方法上,他指出:"夫泥於中法者,恒糾纏文字,論說則不簡明。泥於代數者,恒展卷即演算式,絶不窮其源委。余力矯此弊,務溯源於撰題本旨,揭以示人"。在運算方法上,從對1883年同積同勾弦和的整數勾股形解即可看出,他認識到了西方代數學不定方程解法的優越性,用它解中國傳統數學問題。而同時他也充分重視中國傳統數學二千餘年發展中,在算法及解題技巧方面的成就。他後來巧妙地以勾股術,連比例等方法解不定方程。雖然得出的僅是一些特殊聯係,但其運算簡明,確實爲解不定方程提出了一個非常新穎的方法。正如徐謙所言:"夫學者讀書,每囿於成法,不能變通,僅求能解而止耳。故代數雖妙逾古法,而學者仍無以自得。於是先去綜括衆理,獨運精思。……自先生以題誨人,而後代數雖屬西法,而人乃視爲已有矣"。

劉彝程的成就不僅在數學研究方面。劉氏二十五年的教學生涯中,培養出一批得力弟子。徐謙稱:"方今海内能算之士,半出先生門下"[6]。雖有夸張之處,但亦可見其成績斐然。其弟子支寶枬、陳維祺、徐謙、胡維得等在當時較有名氣[3],而其他一些數學家如崔朝慶、華世芳、沈善蒸、繆秋澄等也作過劉氏的會考試題,顯然亦曾得其裨益[4]。他們或著書立說,或潛心教學,爲中、西數學的發展作出了貢獻。

二 對整數勾股形的研究

劉彝程評其中年所成數種著述："蓋拙著數種，雖閒發明微，究恐不出前人範圍"[4]。又評其後期著作《簡易庵算稿》："二十年來，精神所注，悉聚於求志算題稿中。"劉彝程的研究成果也都以算題形式出現於該書中，故從《算稿》中可窺其數學水平。

《簡易庵算稿》是求志書院的一部試題集解。求志書院共設六齋，每季由各齋各命四題，進行考核，優勝者由巡道捐廉[7]。劉氏在任期間，共擬三百六十五題。《算稿》中收錄二百四十五題，內含"存題"四十。該書涉及數學內容廣泛，主要有整數勾股形、垛積、測圓、對數、方程論、三角，還有一些排列組合及力學等內容，其中解整數勾股形爲其突出成就之一。本文將就這一問題進行討論。

勾股術是中國傳統數學的重要研究課題。自《周髀算經》、《九章算術》中給出勾股定理，其後經過近兩千年的研究，成就頗豐。但多集中於如何求解勾股形，關於構造整數勾股形的研究始於《數理精蘊》中《定勾股弦無零數法》一篇[8][9]。其後，李善蘭、陳傑等都對此專題進行了研究。而清末劉彝程對此問題的研究成果則較爲突出。

1883 年，劉氏提出解同積、同勾弦和的直角三角形。此類三角形的解法最早出現於《數理精蘊》。其時梅瑴成給出一方程：

$$y^2\left(\frac{c+a}{2}-y\right)=\frac{\left(2\cdot\frac{1}{2}ab\right)^2}{2(c+a)}$$

其中解出 y 便是所求之勾。梅氏囿於中國古法，只給出一個正根，定爲 a。汪萊經過對此式深入研究後指出，形如：

$$k[(c+a)-x]^2=\frac{\left(4\cdot\frac{1}{2}ab\right)^2}{c+a}$$

的方程可有兩個符合題意的正根（共有三正根，另一個大於 c+a，不合題意），即有兩個不同的勾股形可有相同的勾弦和與勾股積。汪氏還給出兩勾股形之間的一個關係式：

$$(c_1-a_1)+\sqrt{c_1-a_1}\sqrt{c_2-a_2}+(c_2-a_2)=c+a \qquad (w)$$

其後李善蘭與日本學者加悅傳一郎都對此式作了進一步研究，給出了求具有如上條件的整數勾股形的解法。李氏取同奇偶的兩數 m、n，令

$$c_1-a_1=(2mn)^2,\qquad c_2-a_2=\left(\frac{3m^2-2mn-n^2}{2}\right)^2,\qquad c+a=\left(\frac{3m^2+n^2}{2}\right)^2.$$

於是給定 m、n 即可求出一對具有相同勾弦和與勾股積的整勾股形。取 $c_1-a_1=(m^2-n^2)^2$，

$$c+a=(m^2+n^2+mn)^2,\qquad c_2-a_2=(2mn+n^2)^2 \qquad (J)$$

其中 m、n 爲任意整數[11][12]，加悅傳一郎得出(w)式的另一組解。

在 1883 年秋試題中，劉氏利用(w)試給出兩個已知一勾股形求與其具有相同勾股積與勾弦和的另形勾股的方法。

設 $x^2+xy+y^2=a+c$，其中 $x=\sqrt{c_1-a_1}$，$y=\sqrt{c_2-a_2}$則 $x^2+xy=2a_2$，　$xy+y^2=2a$，

由 $4a^2=(y^2+xy)^2=(x^2+2xy+y^2)y^2$，而 $x^2+2xy+y^2+y^2=3a_1+c$，

於是以 $4a^2$ 爲長方積，$3a+c$ 爲長闊和，求得長方形的長即爲 y^2 爲 c_2-a_2。

即解方程　$y^2-y(c-3a)+4a^2=0$ 可得另形勾弦較。

同理解方程　$x^2-(c-a)x=(c-a)2a$ 可得另形之勾，進而可解該勾股形。

劉彝程指出，如要求得整數勾股形，則要利用他於該年春季試題中所解之不定方程：

$$x^2+y^2+xy=z^2 \tag{1}$$

其解法受《代數術》189 款啓發。令：$z=x+u$，則

$$x^2+xy+y^2=x^2+2xu+u^2,\quad xy+y^2=2xu+u^2,\quad x=\frac{y^2-u^2}{2u-y} \tag{2}$$

取 $x=m^2-n^2$，則 $y=m(2n-m)$，$u=n(2n-m)$，　$z=m^2+n^2-mn$　$(m>n)$　(3)

由以上解法可以看出，劉氏解至(2)式并未造成失根，經整理

$$x=\frac{y^2-u^2}{2u-y}=\frac{3u^2}{2u-y}-2u-y$$

取 $u=n$，$y=m$，則

$$x=\frac{m^2-n^2}{2n-m},\quad y=m,\quad z=\frac{m^2+n^2-mn}{2n-m}$$

爲方程(2)的基礎解系。若取整數解，僅能取整數 n，令 $3n^2$ 的一個因數爲 $2n-m$，解出 m 即可。但解至(3)式則造成了失根。經驗算可得(L)解與(J)解滿足(2)。我們還可以得到這三組解的關係。如把這三組解整理成恒等式，我們可以得出：

$$(4mn)^2+4mn(3m^2-2mn-n^2)+(3m^2-2mn-n^2)^2=(3m^2+n^2)^2 \tag{L}$$

$$(m^2-n^2)^2+(m^2-n^2)(2mn+n^2)+(2mn+n^2)^2=(m^2+mn+n^2)^2 \tag{J}$$

$$(m^2-n^2)+(m^2-n^2)(2mn-m)^2+(2mn-m^2)^2=(m^2+mn+n^2)^2 \tag{3}$$

在(J)式中取 $m=p+q$，$n=p-q$ 可得

$$(4pq)^2+4pq(3p^2-2pq-q^2)+(3p^2+2pq-q^2)^2=(3p^2+q^2)^2$$

與(L)式等價，而在(L)式中取 $m=\frac{p+q}{2}$，$n=\frac{p-q}{2}$ 可得與(J)式等價的一恒等式。但此處要求 p，q 同奇偶。由此可見，僅就解不定方程(1)而言，加悅解實爲李善蘭解集的一個擴充。而在(3)式中取 $m=q$，$n=-p$，可得一與(J)式等價的恒等式。於是劉氏解集又爲加氏解集的一個補充。

同年“秋三”中，劉氏又以類似方法給出另一組解：

$$c_1-a_1=[2m^2+mn]^2,\ c_2-a_2=[2mn+\frac{3}{2}n^2]^2,\ c+a=(2m^2+3mn+\frac{3}{2}n^2)^2。$$

其中 m 爲奇數，n 爲偶數。

同時，劉氏指出解不定方程只需逐步演算，而若將其結果運用於整數勾股形便生出諸多限制。如勾弦和、勾弦差要同奇偶，勾弦小於股等。故其解中對 m，n 取法加上了一些條件，劉氏還給出防止勾股互易之法，即取 m、n，使得滿足以下兩條中一條即可保證 $a<b$：

i) $z<(\sqrt{2}+1)x$ 且 $z<(\sqrt{2}+1)y$　ii) $R<y<\frac{1}{2}(\sqrt{9+8\sqrt{2}}-1)x$

其後劉彝程利用數題對不定方程(1)進行求解，其方法多利用勾股術及(2)式。

其“甲申春一”中，取整數勾股形勾股弦 a，b，c，令：

i) $x=3(c-a)+2b$，　$y=2(c+a)+2b$；　ii) $x=2b-c-a$，　$y=2a$；

iii) $x=(c-a)-8(c-b)$, $y=4(c-b+a)$;　iv) $x=(c+b)-4(c-b)$, $y=4c-b+a$;
分別構成(1)式的解。劉氏還得出一個更一般的恒等式(其中 c 爲任意整數):

$$(m^2-n^2)+cm(m-2n)(m^2-n^2)+m^2(m-2n)^2=(2m^2+n^2-mn)^2 \tag{4}$$

劉彝程還與 1883 年夏討論了同勾弦和,同弦和較之整數勾股形,給出其通解。設 a、b、c 爲一勾股形勾、股、弦,$c+a<4(c-a)$,令 $a'=a-\frac{1}{2}[(c-b)-(b-a)]=\frac{1}{2}(a+2b-c)$,

$b'=b+(c-a)-2(b-a)=a-b+c$,$c'=c+\frac{1}{2}[(c-b)-(b-a)]=\frac{1}{2}(a-2b+3c)$,

則 a'、b'、c' 爲與原形具有相同勾弦和,相同弦和較的勾股形的勾、股、弦。其解法爲:

因 $(c+a)(a+b-c)=b(a-b+c)$,$(c'+a')(a'+b'-c')=b'(a'-b'+c')$.

令 $(c+a)(a+b-c)=(c'+a')(a'+b'-c')$。故:$b(a-b+c)=b'(a'-b'+c')$

令 $b'=a-b+c$,又因:$a'+c'=a+c$ 依勾股術得:

$$c'-a'=\frac{b'^2}{c'+a'}=\frac{(a-b+c)^2}{a+c}=2(c-b)。$$

於是得出解:$a'=\frac{1}{2}(a+b-c)$,　$c'=\frac{1}{2}(a-2b+3c)$。

欲使 $a'<b'$,還要求:$\frac{1}{2}(a+2b-c)<a-b+c$,$(a+c)<4(c-b)$。

1884 年"春三題"中,劉氏又討論了勾股較恒爲一的勾股形造法。此相當於求解不定方程 $2x^2+2x+1=z^2$ 其中 x、z 分別是欲求勾股形的勾與弦。

劉氏解法爲:取一勾股較爲一的整數勾股形(a_0,b_0,c_0)且取

$$c-a=b_0+c_0,\ c-b=a_0+c_0,\ b+a-c=a_0+b_0+c_0 \tag{5}$$

即　$a=2c_0+b_0+2a_0$,$b=2c_0+2b_0+a_0$,$g=3c_0+2a_0+2b_0$。

可得出另一勾股差爲一的勾股形。令 $S_n=a_n+b_n+c_2$　取

$$a_n=2S_{n-1}-b_{n-1},\ b_n=2S_{n-1}-a_{n-1},C_n=2S_{n-1}+C_{n-1}。 \tag{6}$$

其中 n=1,2,3,…。於是若以勾股差爲 1 的勾股形三邊(如 3、4、5)代人(6)式,即可得出一組具有相同性質的勾股形。劉氏在證明中對此式并未詳加闡述,錢寶琮《中國數學之整數勾股形研究》一文中給出如下解釋:

欲令　$b'-a'=b-a$,術令　$c'-a'=c+b$,　$c'-b'=c+a$,

因　$2(c'-a')(c'-b')=(a'+b'-c')^2$,$2(c+b)(c-b)=(a+b+c)^2$,故得

$$a'-b'-c'=a+b+c。$$

此證明利用勾股恒等式,與劉氏解此類問題的思路一致。很可能就是劉氏當時推斷之法。

實際上,(6)式不僅給出了勾股差爲 1 的勾股形通解,取勾股差爲任一常數的勾股形代人,便可得到一組具有相同勾股差的勾股形,即任取一組(x_0,y_0,z_0),$y_0-x_0=k$,
取 $S_n=X_n+Y_n+Z_n$,即 $K_n=2S_{n-1}-y_{n-1}$,$y_n=2S_{n-1}-X_{n-1}$,$z_n=2S_{n-1}+C_{n-1}$
構成不定方程　$2x^2+2kx+k^2=z^2$ 的一個解系。劉氏對此結論顯然是了解的。

1894 年,他利用(6)式解決了一個不定方程問題

$$2x^2+7=y^2 \tag{7}$$　　$$2x^2-7=y^2 \tag{8}$$

劉氏利用勾股恒等式 $2x^2-(b-a)^2=(a+b)^2$,

及　$2(a-b-c)^2+(b-a)^2=[(c-a)+(c-b)]^2$　將上述兩個不定方程化爲求解勾股差恒

爲7的整數勾股形。取(5,12,13)及(8,15,17)的爲兩個基本勾股形,劉氏得出兩組勾股差爲7的勾股形。在(7)式中令:$x=c_n$,$y=a_n+b_n$,(8)式中令:$x=a_n-b_n-c_n$;$y=(c_n-a_n)+(c_n-b_n)$。其中 n=1,2,3,…即可得到不定方程(7),(8)的兩個解系。

劉彝程還於1895提出一四元二次不定方程

$$x^2+y^2=u^2+v^2 \tag{9}$$

取 $x=AC$,$y=BC$,則 $x^2+y^2=S_{EACD}+S_{MBCF}=(x-y)^2+2xy$

令 $u=x-y$;則只要2xy爲一完全平方數即可得出方程(8)的解。劉彝程解中給出四種答案。設a、b、c爲任一直角三角形的勾股弦,

①令 $x=c-a$,$y=c-b$,則 $2xy=(a+b-c)^2=v^2 x-y=b-a=u$,

即① $\begin{cases}x=c-a,\\y=c-b,\\u=b-a,\\v=a+b-c。\end{cases}$ 同理② $\begin{cases}x=b+c,\\y=a+c,\\a=b-a,\\v=a+b+c。\end{cases}$ ③ $\begin{cases}x=b+c,\\y=c-a,\\u=b+a,\\v=b+c-a。\end{cases}$ ④ $\begin{cases}x=c+a,\\y=c-b,\\u=a+b,\\v=c+a-b。\end{cases}$

均爲方程(9)的解。

劉氏還有一些關於整數勾股形和不定方程的課題,其構造方法均很巧妙。

以上成就說明,劉彝程對於勾股術和不定方程均有很深造詣。其研究也多有獨到之處。

綜上所述,劉彝程作爲清朝末年的一位重要數學工作者,將畢業精力傾注於數學研究與數學教育工作,他的工作不僅豐富了中國傳統數學的最後成就,還爲傳播西方數學作出了定出貢獻。尤其是他融合中西數學的嘗試甚至爲當代數學家提供了一個可以借鑒的模式。雖然劉氏之後不久中國數學即被西方數學所取代,但劉彝程及其同時代的數學家們的工作還是給中國學術界,數學界留下了寶貴的遺產。

本文是筆者碩士論文的一部分,在李兆華教授指導下完成,在此深表謝意。

參 考 文 獻

[1] 蕭穆、劉融齋別傳,《續碑傳集》,光緒九年(1883)江蘇書局刊本。

[2] 劉熙載,昨非集,《古桐書屋遺書》,光緒八年(1882)刊本。

[3] 劉彝程傳,《續修興化縣志》十五卷,1943鉛印本。

[4] 劉彝程,《簡易庵算稿》自序。光緒庚子(1900),江南制造局刊。

[5] 丁福保,周雲青,《四部總錄算法编》,文物出版社,1984新一版。

[6] 徐謙,《簡易庵算稿》跋,光緒庚子(1900)江南制造局刊。

[7]《求志書院》上海縣續志,中國方志叢書,成文出版社有限公司印行,據上海通社輯刊1935鉛印本影印。

[8] 梅彀成主编,《數理精蘊》,光緒八年(1882)廣東藩司刊本。

[9] 錢寶琮,《中國數學之整數勾股形研究》。《錢寶琮科學技術史論文選集》,1983。

[10] 李善蘭,《天算或問》,《則古昔齋算學》,同治十三年(1874)刊本。

[11] 加悅傅一郎,《圓理括囊》,《白芙堂算學叢書》,同治十一(1872)年刊本。

[12] 錢寶琮,《中國數學史》,科學出版社,1964。

華林問題在中國*

郭世榮
(內蒙古師範大學科學史研究所)

數論中有這樣一類難題：提出問題和解決問題的難度形成了鮮明的對比。人們憑借經驗可較爲容易地提出命題，但要證明它或否定它卻相當困難。華林問題就是一個典型例子。它和哥德巴赫問題(*Goldbach's Problem*)同樣著名，同樣引人注目，同樣吸引了一代又一代學者。中國數學家們對於哥德巴赫問題的具有世界意義的工作使得它在中國産生了相當大的"知名度"和"普及"性。其實，中國學者在華林問題上也做出了突出的貢獻。本文嘗試追踪這個數論難題在中國的歷史軌迹，討論中國數學家在這方面的工作。

一、華林問題及其早期歷史簡述

1.1 華林問題

這是一個以英國數學家埃德華・華林(*Edward Waring*，1734－1798)命名的問題。華林是劍橋大學1757年的畢業生，1760年獲碩士學位，同年被任命爲劍橋大學第六任路卡斯(*Lucas*)數學教授。1763年當選爲倫敦皇家學會會員。1762年，出版了《分析雜記》一書，使他成爲當時第一流的數學家。此後，他在數論、代數、代數曲面論和無窮級數論中都有貢獻。1770年，他出版了《代數沉思錄》(*Meditations Algebraicae*)一書，公布了許多著名的問題，如哥德巴赫問題。華林問題見於該書第204－205頁上，他這樣寫道[73]：

> 每一個自然數皆可表成四個數的平方之和，皆可表成九個非負整數的立方之和，皆可表成十九個整數的四次方之和，等等。

根據這個論述，數學家們認爲華林的猜想實質上相當於提出：對於每一個給定的正整數 $k(\geqslant 2)$，存在一個僅與 k 有關的數 $s=s(k)$，使得每一個自然數 n 皆可表成 s(僅與 k 有關)個非負整數的 k 次冪之和。並把這個未加證明的猜想稱爲"華林問題"(*Waring's Problem*)。

命 $r(n)=r(s,k,n)$ 表示把 n 表成 s 個非負整數的 k 次冪之和的種數，即下列不定方程的解數：

$$x_1^k + x_2^k + \cdots + x_s^k = n, \qquad x_i \geqslant 0 \tag{1}$$

則華林問題就是：

問題1　證明存在 $s=s(k)$，使得 $r(n)>0$。進一步還有下列相關的

問題2　對於給定的 k，求 s 的最小值 $g(k)$。華林已經指出 $g(2)=4$，$g(3)=9$，$g(4)=$

* 本文係中國科學院數學研究所開放委員會資助項目。

19。

問題 3　對於充分大的 n，確定對應於 $g(k)$ 的值 $G(k)$。

問題 4　確定 $r(n)$，特別是對於某一 $\bar{G}(k)$，確定 $r(n)$ 的漸近公式，要求 $\bar{G}(k)$ 越小越好，顯然，$G(k)\leqslant\bar{G}(k)$。

上述問題構成了華林問題的主干，同時，通過進一步的推廣，又產生了各種各樣的新的相關問題，如簡易華林問題（*Easier Waring's Problem*）、華林-哥德巴赫問題（*Waring-Goldbach's Problem*）、華林-卡姆克問題（*Waring-Kamke's Problem*）、多項式的華林問題（*Waring's problem with polynamial*）等等。

L. E. Dickson 對華林問題的早期歷史做過相當仔細的研究〔8,9〕，*R. C. Vaughan* 也對 20 年代以來的進展做了總結〔67〕。

1.2 華林－希爾伯特定理

希爾伯特（*D. Hilbert*）在 1909 年的工作對於華林問題來說是首次重大突破。此前 130 年的工作總的講是相當零散的。

對於最簡單的特例，即 $k=2$ 時的四平方問題，大約在丟番圖時代人們已經知道了。不過最早的證明是由費馬（*Fermat*）給出的，而第一個公開發表的證明則屬於拉格朗日（1770）。自華林問題公布之後，多數研究集中在小指數（即 k 不大時）上，或者對 $g(k)$ 進行估計，或者通過具體驗算來確定 $g(k)$。其中第一個重要的成果是劉維爾（*J. Liouville*）在 1859 完成的，他用初等方法證明了任何整數皆可表示成 53 個非負整數的四次冪之和，即 $g(4)\leqslant 53$。這個結果又被 *S. Réalis*（1878）、*E. Lucas*（1878）、*Fleck*（1906）、*Landau*（1907）、*Wieferich*（1909）等人逐漸改進到 $g(4)\leqslant 37$。其他研究主要是對 $g(k)(k\leqslant 10)$ 的估計，也有個別是對多項式的華林問題的研究。

希爾伯特〔22〕一舉解決了問題 1，但他沒有對 s 給出任何適用的界限。他的方法相當復雜，其中用到了 25 重積分（後改進爲 5 重積分）。他證明了 *Hurwitz* 提出但未能證明了的一個引理：

對於每一個 m（以及 $r=5$），存在 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 的恒等式

$$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_r^2)^m=\sum_k \rho_k(a_{1k}x_1+\cdots+a_{rk}x_r)^{2m}$$

其中 a_{ik} 是整數，ρ_k 是正有理數。利用這個引理，可以解決指數爲 2^k 時的問題 1，而其它情形可以用初等方法由此導出，但是需要相當冗長的計算。

希爾伯特的工作的意義在於解決了 $s(k)$ 的存在性，因而被稱爲華林－希爾伯特定理。他之後，*F. Hausdorff*（1909）、*E. Stridsberg*（1910－1912，1916）、*R. Remak*（1912）、*G. Frobenius*（1912）又多方改進、簡化了他的證明，得到了代數方法，但希爾伯特的方法終究未能對後來的研究產生重大的影響。

1.3 *Hardy-Littlewood-Ramanujan* 圓法

英國數學家 *G. H. Hardy* 和 *L. E. Littlewood* 建立了一座新的里程碑，這兩位數學家自 1910 年起，共同合作研究達 35 年之久，聯合發表論文百餘篇，取得了許多重要成果。他們對華林問題的重大貢獻是建立了一種新的解析方法，稱爲圓法（*Circle method*）。這個方法不僅把華林問題的研究推向了嶄新的階段，而且爲研究其他堆壘問題也提供了同樣重要的工具。

它的萌芽最早出現於 Hardy 和印度數學家 S. Ramanujan 合作的一篇論文中(1918)[21]，因此被稱爲 Hardy-Littlewood-Ramanujan 圓法。他們在此前發表的一篇文章[20]對 $r(n)$ 和 $T(k,n)$(華林—哥德巴赫問題的解數)做了研究，給出了漸近公式：

$$\log r(k,n) \sim (k+1)\left\{\frac{1}{k}\Gamma(\frac{1}{k}+1)\zeta(\frac{1}{k}+1)\right\}^{k/(k+1)} n^{1/(k+1)}$$

$$\log T(k,n) \sim (k+1)\left\{\Gamma(\frac{1}{k}+1)\zeta(\frac{1}{k}+1)\right\}^{k/(k+1)} (\log n)^{k/(k+1)}$$

自 1920 年至 1928 年，Hardy 和 Littlewood 共同撰寫了八篇著名的論文，建立起了他們的方法。這八篇論文的總題目爲 *Some Problems of "Partitio Numerorum"*(Ⅰ—Ⅷ)(第Ⅶ篇未發表)，其中第Ⅰ(1920)、Ⅱ(1921)、Ⅳ(1922)、Ⅵ(1925)和Ⅷ(1928)等五篇是專論華林問題的[15—19]。他們的方法可簡述如下：

設 $A=(a_m)$表示非負整數組成的單調增加數列，命

$$F(z)=\sum_{m=1}^{\infty} z^{a_m} \qquad (|z|<1) \tag{2}$$

它的 s 次冪爲

$$\begin{aligned} F(z)^s &= \sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_s=1}^{\infty} z^{a_{m_1}+\cdots+a_{m_s}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} R_s(n) z^n \end{aligned} \tag{3}$$

其中，$R_s(n)$是把 n 表示成 A 中 s 個數之和的種數。根據 Cauchy 積分公式，有

$$R_s(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathscr{B}} F(z)^s z^{-n-1} dz \tag{4}$$

其中，$\mathscr{B}$ 表示以 O 爲圓心，$\rho(0<\rho<1)$爲半徑的圓周。Hardy 和 Ramanujan 取 $a_m=m^2$，Hardy 與 Littlewood 的文章中又取 $a_m=m^k$，這樣 $R_s(n)$就變成了不定方程(1)的解數，即此時 $R_s(n)=r(n)$。因此，問題的關鍵就是如何估計、計算(4)式的右端。

按照 Hardy-Littlewood-Ramanujan 圓法，估計(4)式的核心是把 $\mathscr{B}$ 分爲兩大類，然後在每一類上計算積分。$\mathscr{B}$ 的分割方法爲：設 a/q 爲有理數，$a<q$，$(a,q)=1$，對所有$\frac{a}{q}$，在圓 $\mathscr{B}$ 上對應於 $e^{2\pi i\frac{a}{q}}$ 的點附近取一適當的小圓弧，當 q 在規定的較小界限內時，這些小圓弧是兩兩不相交的，稱爲優弧 E_1，$\mathscr{B}$ 的剩餘部分稱爲劣弧 E_2。因此(4)式變爲：

$$R_s(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{E_1} F(z)^s z^{-n-1} dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{E_2} F(z)^s z^{-n-1} dz \tag{5}$$

在(5)中，前一項是主要部分，後一項則爲次要部分，可忽略不計。

設 $a=\frac{1}{k}$，$K=2^{k-1}$，$\chi=1-\frac{1}{K}$，$s>2K+1$，Hardy 和 Littlewood 的文Ⅰ證明了

$$r_{k,s}(n)=Cn^{sa-1}S+O(n^{sa\chi+\epsilon}) \tag{6}$$

其中 S 稱爲奇異級數，C 是與 k、s 相關的正數，$e_q(x)=e^{2\pi ix/q}$，$f=O(g)$意指存在常數 M 使得 $|f|<Mg$。當 $n\to\infty$時，對所有充分大的 s 有

$$r_{k,s}(n)\sim Cn^{sa-1}S$$

在文Ⅱ中，他們又改(6)爲：

$$r_{k,s}(n) = Cn^{sa-1}S + O(n^{(s-4)aT+2a+\varepsilon}) \tag{7}$$

其中 ε 爲任意小的正數。在文 Ⅳ 和 Ⅵ 中，得到

定理：存在正數 $\sigma=\sigma(k,s)$，使得對 $s\geqslant(k-2)K+5$ 時有 $S\geqslant\sigma$，而且

$$r_{k,s}(N) \sim S(N)N^{sa-1}\Gamma^s(1+a)\Gamma^{-1}(sa) \tag{8}$$

特別地，對於這樣的 s 和充分大的 n，$r_{k,s}(n)$是正的，因此，

$$G(k) \leqslant (k-2)K + 5 \tag{9}$$

定理：當 $k>3$ 時，有

$$G(k) \leqslant \left(\frac{1}{2}k - 1\right)K + k + 5 + \left[\frac{(k-2)\log 2 - \log k + \log(k-2)}{\log k - \log(k-1)}\right] \tag{10}$$

其中$[x]$表示 x 的整數部分。

圓法的重要意義在於它同時研究問題 1、3、4，不僅得到了 $G(k)$，而且給出了 $r_{k,s}(n)$的漸近公式。

1.4 維諾格拉朵夫的貢獻

蘇聯的維諾格拉朵夫(Иван Виноградов，1891－1983)在華林問題的研究上樹立了另一座里程碑。維諾格拉朵夫在數論上的成就十分突出，一生發表論文 100 多篇，出版過四部專著及兩部選集。他的工作對華羅庚及其他數論家都產生了相當大的影響〔79〕。維諾格拉朵夫自 1924 年開始鑽研華林問題，當年他給出了"問題 1"的一個相當初等的證明，只用到了傅里葉級數和 *Weyl* 對於三角和的估計方法，沒有用到圓法。1928 年，他在圓法中引入了一些新的技巧〔69〕，1934 年，他發現了估計三角和的相當有效的方法，並在 1937 年〔70〕和 1947 年〔71〕做了重要改進和總結。

維諾格拉朵夫用有限三角和代替了 *Hardy-Littlewood* 方法中的(2)式，設

$$f(\alpha) = \sum_{m=1}^{N} e(\alpha m^k) \tag{11}$$

其中 $N=[n^{1/k}]$。這樣，

$$F(\alpha)^s = \sum_{m=1}^{sn} R_s(m,n)e(\alpha m) \tag{12}$$

這裏 $R_s(m,n)=R_s(m)$ $(m\leqslant n)$，是把正整數 m 表示成 s 個不超過 N 的非負整數的 k 次冪之和的種數。利用

$$\int_0^1 e(\alpha h) = \begin{cases} 1 & \text{當 } h = 0 \\ 0 & \text{當 } h \neq 0 \end{cases}$$

可得

$$R_s(n) = \int_0^1 f(\alpha)^s e(-\alpha n)d\alpha \tag{13}$$

在計算(13)時，也把區間〔0,1〕分成主區間(優弧)和餘區間(劣弧)。主區間 E_1 由以有理點 $\frac{a}{q}$ 爲中心的一些互不相交的小區間組成，這裏要求 q 適當小。餘區間 E_2 爲〔0,1〕除去 E_1 的剩餘部分。維諾格拉朵夫估計(13)的方法比 *Hardy-Littlewood* 方法簡單的多，其核心是所謂的維諾格拉朵夫中值定理，這在下面還將提到。

利用自己的方法，維諾格拉朵夫多次改進了華林問題的已有結果〔78〕。他先後獲得的

$G(k)$的上界有：

1934 年，$G(k)\leqslant 32k^2(\log k)^2$；

1935 年，$G(k)\leqslant k(6\log k+\log 216+4)$　　$(k\geqslant 4)$

1938 年，$G(k)\leqslant k(4\log k+8\log\log k+12)$

1947 年，$G(k)\leqslant k(3\log k+11)$　　$(k\geqslant 3)$

1959 年，$G(k)\leqslant k(2\log k+4\log\log k+2\log\log\log k+13)$，　$k>170000$。

由於 $G(k)>k$，所以維氏在 1935 年首次得到的 $G(k)$與最終結果至多衹差 $\log k$ 的階。可以說，$G(k)$的階 $k\log k$ 已基本上達到了最好的可能性。對於使 $r_{k,s}(n)$的漸近公式成立的 $\tilde{G}(k)$，維諾格拉朵夫也屢有降低，從 $\tilde{G}(k)\leqslant 183k^9(1+\log k)^2$（1935 年）逐漸降到 $\tilde{G}(k)\leqslant 2k^2(2\log k+\log\log k+5)$，$(k\geqslant 4)$。

另外，在 30—40 年代，在華林問題上工作的還有其他一批數學家，例如 *S. D. Chowla*，*H. Davenport*，*L. E. Dickson*，*P. Erdös*，*T. Estermann*，*M, Gelbcke*，*H. Heibronn*，*R. D. James*，*I. Niven*，*E. M. Wright*，等等。他們各自都對華林問題的研究做出了自己的貢獻。

二、華林問題在中國

2.1 概述

談到華林問題在中國的情況，首先應提起的是楊克純和華羅庚兩位數學家。楊克純，字武之（1896－1973），在國内更多的使用楊武之這個名字，而他的英文名字則用克純，即 *K. C. Yang*。楊武之是我國最早開始研究現代數論者之一，也是我國第一個開始研究華林問題的學者。他於 1918 年畢業於北京師範大學，然後回安徽任教，直到 1923 年考取省官費留學生、赴美國斯坦福大學學習，一年後獲學士學位，又進入芝加哥大學繼續攻讀數學，於 1928 年獲博士學位。同年回國任廈門大學教授，1929 年受聘任清華大學數學教授，1936 年又任系主任。他在芝加哥讀書時，數學家、數學史家 *L. E. Dickson*（1874－1954）正在那裏執教，同時也領導着那裏的數論研究工作。*Dickson* 對華林問題有着相當濃厚的興趣，撰寫了大量論文。楊武之是他的學生，他的博士論文就是關於三次多項式的華林問題的研究，這是當時不少人感興趣的課題，楊武之獲得了一些新的結果，其方法也有一定的價值。

在楊武之之後投入到這一領域的是華羅庚（1910－1985）。他於 1931 年由楊武之和熊慶來推薦進入清華大學數學系做管理員，後逐漸擔任助教、教員等職。1934 年，任中華文化教育基金會乙種研究員，1936 年到 1938 年經數學家維納（*N. Wiener*）推薦赴劍橋大學訪問，1938 年回國在西南聯大任教授，1946 年先赴蘇聯講學，秋天又去美國，在普林斯頓高級研究所、普林斯頓大學、伊利諾大學等處任職。1950 年 2 月回國，從事教育和研究工作。他是享譽國際的著名數學家〔72〕。

華羅庚進入清華大學後，全力學習了高等數學知識，特别致力於數論的學習，熟讀了希爾伯特的“數論報告”（*Bericht über die Theorie der algebraischen zahlkörper*，1897）以及郎道（*E. Landau*）的《數論教程》（共三卷）（*Vorlesungen über Zahlentheorie*，*Band* I，II，III，1927）等名著。同時還得到了楊武之的指導和幫助，開始致力於華林問題的研究〔72〕。1934 年在印度發表了“三次冪的華林問題”〔23〕，這是他在這個問題上的第一篇論文。以後，他在華林問

題上不斷深入，撰寫了二、三十篇論文，取得了一系列舉世矚目的成果。

在英國，他和 *Hardy*、*Littlewood*、*Davenport*、*Mordell*、*Heilbronn*、*Estermann* 等數論專家建立起了良好的關係，得到了他們的熱情幫助和支持。同時，還和維諾格拉朵夫建立起了聯繫，進行交流，並掌握了 *Hardy-Littlewood* 方法、維諾格拉朵夫方法以及其他人的成果，把自己塑造成了一流的數學家。1940 年，他撰寫了經典著作《堆壘素數論》，1947 年出了俄文版，還被譯成了中文(1953，1957 修訂)、英文(1957，1966)、匈牙利文(1959)、德文(1957)和日文(1954)等多種文字。該書總結了他自己在堆壘數論方面的成就，發展了維諾格拉朵夫方法，正如他在俄文版原序中所指出的："本文中叙述了關於堆壘素數論的新結果，這一學科的基礎是由 И. M. 維諾格拉朵夫院士所奠立的，而由著者發展的。"

華羅庚對華林問題及其變體做出了突出貢獻，他"對圓法發展所做的貢獻，與達文波特的貢獻一起，僅讓於哈代，李特伍德與維諾格拉朵夫的貢獻，是肯定能夠經得住時間的檢驗的，他的兩個積分均值定理給予了巨大的技術進展，這種永恒的影響甚至超出了希爾伯特定理的範圍；他關於華林問題變體的研究及關於華林-哥德巴赫問題的著名研究，對於弄清圓法的力量與範圍都是極爲開創性的研究。幾代數論學家都從華羅庚的至今仍有影響的 1947 年的專著《堆壘素數論》中學到圓法的知識，上述沃恩的近作(注：指 *R. C. Vaughan* 的[67])，對於迄今爲止圓法的巨大進展，作了很好的總結。即使大致翻閱一下，亦能看到華羅庚對圓法發展所作的貢獻所處的杰出地位。"[14]

30 年代，中國現代數論的奠基者之一柯召也研究過華林問題，他在英國曼徹斯特大學專攻數論，研究丢番圖方程和二次型理論。他關於華林問題的論文將在下文提到。50 年代以後，又有一批青年數學家投入了這方面的研究。

2.2 指數和的估計

$r_{k,s}(n)$ 及奇異級數 $S(n)$ 與指數和的密切關係決定了指數和的估值在研究華林問題中的重要作用。$G(k)$ 和 $\bar{G}(k)$ 的新界限的獲得都依賴於對指數和的估值。有鑒於此，這裏先列出華羅庚在指數和方面的幾個著名的結果，它們在華林問題中有十分重要的應用。

設 q 和 k 是正整數，$f(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x$，其中 $a_k,\cdots,a_1$ 是整數，$(a_k,\cdots,a_1,q)=1$，指數和

$$S(q,f(x)) = \sum_{x=1}^{q} e_q(f(x)), \qquad (e_q(x) = e^{2\pi ix/q}) \tag{14}$$

稱爲完整指數和。其中 $S(q,a_2x^2)$ 稱爲"高斯和"，因爲高斯首先給出了它的非平凡估計。對於素數 p，*Landan* 在 1927 年給出

$$S(p,f(x)) = O(p^{1-\frac{1}{2k-1}+\varepsilon})$$

Mordell[62]在 1932 年獲得 $S(p,f(x))=O(p^{1-\frac{1}{k}})$，這裏 O 所包含的常數僅與 k 和 ε 有關，與 a_i 無關。

華羅庚[45]在 1940 年給出了(14)的一個非常精密的估計，得到

$$S(q,f(x)) = O(q^{1-\frac{1}{k}+\varepsilon}) \tag{15}$$

其中 O 僅與 k 和 ε 有關。這個結果是利用 *Mordell* 的估值和下述二式得到的：

$$S(q_1q_2,f(x)) = S(q_1,f(q_2x)/q_1)S(q_2,f(q_1x)/q_2) \tag{16}$$

$$S(p^l,f(x))=O(p^{l(1-1/k)}) \tag{17}$$

式中$(q_1,q_2)=1$，p爲素數，$p\nmid(a_1,\cdots,a_k)$，O僅與k有關。(17)是關鍵，華羅庚以相當好的技巧證明了它。

對於(14)的估計有相當長的歷史，(15)式除了ϵ外已是最好的結果，對於無窮多種情形，它已不可能有重大改進了，故這個結果被稱爲"華羅庚定理"。華羅庚在1938年就發表了這方面的論文，得到了比(15)稍弱的結果，O不僅與k和ϵ有關，而且和a_i有關〔39〕。

1957年，華羅庚〔48〕又對(14)的一個特例證明了：

$$\sum_{x=1}^{q}e_q(ax^k+bx)=O(q^{\frac{1}{2}+\epsilon}) \tag{18}$$

其中$(a,q)=1$。證明此式的關鍵是用到了*A. Weil*的一個估計：$|S(p,f(x))|\leqslant(k-1)\sqrt{p}$。因此(18)被稱爲"*Weil*—華氏不等式"，它在華林問題中有十分重要的應用。應用*A. Weil*的估計，(15)中的ϵ可以被略去，它變爲：

$$|S(q,f(x))|\leqslant C(k)q^{1-1/k} \tag{19}$$

對完整指數和的估計僅剩下對$C(k)$的估計，陳景潤〔2〕〔6〕、陸鳴皋〔60〕〔61〕、戚鳴皋和丁平〔66〕分別證明了$C(k)\leqslant e^{3k^2+6/k}$，$e^{6.1k}$，$e^{2.33k}$，$e^{1.85k}$，$e^{2k}$。

在獲得(15)的同時，華羅庚還給出：

$$\sum_{x=1}^{q}e_q(f(x))=\frac{m}{q}S(q,f(x))+O(q^{1-\frac{1}{k}+\epsilon}) \tag{20}$$

以及下列在優弧上的華林問題中有重要的應用的定理：設$f(x)$是整值多項式，$\alpha=\frac{a}{q}+\beta$，

$$S(\alpha)=\sum_{x=0}^{q}e(\alpha f(x)),\qquad I(\beta)=\int_0^{p}e(\beta f(x))d\beta$$

則當$q=O(p^{1-\epsilon})$及$|\beta|=O(q^{-1}p^{-k+1-\epsilon})$時，有

$$S(\alpha)=\bar{q}^{-1}S_{a,q}I(\beta)+O(q^{1-1/k+\epsilon}) \tag{21}$$

其中$\bar{q}=q(q,d)$，d是$f(x)$的係數的最小公分母，$S_{a,q}=\sum_{x=1}^{q}e_q(af(x))$，而$O$與$f(x)$的係數有關。

1957年，他又改進了(20)，證明了〔48〕：

$$\sum_{x=1}^{P}e_q(ax^k)=\frac{P}{q}S(q,ax^k)+O(q^{\frac{1}{2}+\epsilon}) \tag{22}$$

設$\varphi(x)=\alpha_kx^k+\cdots+\alpha_1x$，$\alpha_1$，$\cdots$，$\alpha_k$是實數，則

$$T(p,\varphi(x))=\sum_{x=1}^{p}e(\varphi(x)) \tag{23}$$

稱爲"*Weyl*和"，*H. Weyl*在1916年首先得到了估計此和數的方法。華羅庚〔38〕在1938年對*Weyl*和做出一個重要的估計，給出了所謂的"華羅庚不等式"：

$$\int_0^1|T(p,\alpha\varphi(x))|^{2^v}d\alpha=O(p^{2^v-v+\epsilon}) \tag{24}$$

對$v=1,2,\cdots,k$及$\epsilon>0$成立，這裏$\varphi(x)$是整值多項式。他是用歸納法證明這個結果的。首先，作一個差分算子

$$\underset{y}{\Delta}Q(x)=\frac{1}{y}\{Q(x+y)-Q(x)\}$$

其次，反復應用算法$\underset{y}{\Delta}Q(x)$和 *Schwarz* 不等式可得：

$$|T(p,\alpha\varphi(x))|^{2^\mu}\ll p^{2^\mu-\mu-1}\sum_{y_1}^{p}\cdots\sum_{y_\mu}^{p}\sum_{x_{\mu+1}}^{p}{}^{*}e(y_1\cdots y_\mu\underset{y_\mu}{\Delta}\cdots\underset{y_1}{\Delta}\varphi(x_{\mu+1})\alpha)$$

$$\ll p^{2^\mu-1}+p^{2^\mu-\mu-1}\sum_{y_1}^{p}\cdots\sum_{y_\mu}^{p}\sum_{x_{\mu+1}}^{p}e(y_1\cdots y_\mu\underset{y_\mu}{\Delta}\cdots\underset{y_1}{\Delta}\varphi(x_{\mu+1})\alpha)$$

對 $\mu=1,2,\cdots,k-1$ 成立，* 表示條件：

$$y_1\cdots y_\mu\underset{y_\mu}{\Delta}\cdots\underset{y_1}{\Delta}\varphi(x_{\mu+1})\alpha)\neq 0$$

因而，有

$$\int_0^1|T(p,\alpha\varphi(x))|^{2^v}d\alpha\ll p^{2^{v-1}-1}\int_0^1|T(p,\alpha\varphi(x))|^{2^{v-1}}d\alpha$$

$$+p^{2^{v-1}-v}\int_0^1\sum_{y_1}^{p}\cdots\sum_{y_{v-1}}^{p}\sum_{x_v}^{p}{}^{*}e(y_1\cdots y_{v-1}\underset{y_{v-1}}{\Delta}\cdots\underset{y_1}{\Delta}\varphi(x_v)\alpha)|T(p,\varphi(x)\alpha|^{2^{v-1}}d\alpha\}$$

按歸納假設，右端第一項爲 $O(p^{2^v-v+\epsilon})$，而第二項爲 $p^{2^{v-1}-v}R$，其中 R 表示下列方程的解數：

$$\begin{cases}(y_1\cdots y_{v-1}\underset{y_{v-1}}{\Delta}\cdots\underset{y_1}{\Delta}\varphi(x_v)=\varphi(z_1)-\varphi(z_2)+\cdots-\varphi(z_{2^{v-1}}),\\(y_1\cdots y_{v-1}\underset{y_{v-1}}{\Delta}\cdots\underset{y_1}{\Delta}\varphi(x_v)\neq 0,\ z_\mu,\ y_\mu,x_{v+1}\ll p。\end{cases}$$

所以 $R\ll p^{2^{v-1}+\epsilon}$。從而導出了(24)。

1939 年，他〔44〕又改進了維諾格拉朵夫 1938 年的一個重要結果，用證明(24)相似的方法獲得：

$$\int_0^1\cdots\int_0^1|\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i\varphi(x)}|^s d\alpha_1\cdots d\alpha_k=O(P^{s-\frac{1}{2}k(k+1)+\epsilon})\tag{25}$$

其中 s 由下表決定，O 僅與 k 和 ϵ 有關。

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s	6	16	46	124	312	760	1778	4068	9190
r	80	292	720	1452	2582	4148	6318	9092	12644

維氏原來的結果是(對表中的 r)：

$$\int_0^1\cdots\int_0^1|\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i\varphi(x)}|^r d\alpha_1\cdots d\alpha_k=O(P^{r-\frac{1}{2}k(k+1)})\tag{26}$$

維諾格拉朵夫方法的核心是所謂的維氏中值定理，這是華羅庚在其《堆壘素數論》中首先指出的，1948 年，他〔47〕再次改進了維氏的定理而且極大的簡化了原來的方法，他的新結果被稱作"維一華中值定理"。至今人們在論述維氏方法和結果時，都是按華羅庚的方式進行的〔7〕。設 $k\geqslant2$，$l>0$，$s\geqslant\frac{1}{4}k(k+1)+lk$，維一華定理指出：

$$\int_0^1\cdots\int_0^1|T(P,\varphi(x))|^{2s}d\alpha_1\cdots d\alpha_k\leqslant(7s)^{4sl}(logP)^{2l}P^{2s-\frac{1}{2}k(k-1)-\delta}\tag{27}$$

其中 $\delta=\frac{1}{2}k(k+1)(1-1/k)^l$。1957 年，他和吳方〔52〕又得到：

當$\frac{1}{3}(k+1)k+lk\leqslant s\leqslant Ak^2\log k$時，(26)的右端爲：

$$e^{Bk^3\log k}\log^l P\cdot P^{2s-\frac{1}{2}k(k-1)+\delta} \tag{28}$$

2.3 一般華林問題

A. 對$G(k)$和$\overline{G}(k)$的估計

1981 年，*R. C. Vaughan* 在其專著《*Hardy-Littlewood* 方法》的第二章的開頭寫道："過去一些年來，人們建立了各種各樣的優美方法，其中最引人注目的是華羅庚的方法，利用這些方法可以導出$G(k)\leqslant 2^k+1$的簡捷的證明，顯示出 *Hardy-Litttewood* 方法的許多突出的特征。"這裏所說的華羅庚的工作主要是指他 1938 年在一篇題爲"華林問題"〔38〕的論文中的貢獻。他在這裏的結果是：

設$P_1(x),\cdots,P_s(x)$是s個k次的整值多項式，它們的第一個係數分別是正數$a_1,\cdots,a_s$。設$r(N)$是不定方程：

$$N=P_1(x_1)+P_2(x_2)+\cdots+P_s(x_s)\qquad(x_v\geqslant 0) \tag{29}$$

的解的個數，則當$s\geqslant 2^k+1$時，有

$$r(N)=\prod_{v=1}^{s}a_v^{-1/k}\frac{\Gamma^s(1+1/k)}{\Gamma(s/k)}S(N)N^{s/k-1}+O(N^{s/k-1-\delta}) \tag{30}$$

其中$\delta=2^{1-k}s-z+\varepsilon$，$\varepsilon$爲任意小的正數，

$$S(n)=\sum_{q=1}^{\infty}A_s(q,n) \tag{31}$$

$$A(q)=A_s(q,j)=\sum_{\rho}\left(\prod_{v=1}^{s}\frac{S_{v\rho}}{q_v}\right)\rho^{-j} \tag{32}$$

$$S_{v\rho}=\sum_{h=0}^{q_v}\rho^{P_v(h)}(v=1,2,\cdots,s),\rho=e(l/q),\ (l,q)=1,$$

(32)中ρ跑遍所有q次單位原根。

當$P_1(x)=P_2(x)=\cdots=P_s(x)=P(x)=x^k$時，上述結果就是一般華林問題的結果。華利用他的不等式(24)得到了(30)。這裏得到了$\overline{G}(k)\leqslant 2^k+1$，當$k<14$時，這裏的$\overline{G}(k)$比當時維諾格拉朵夫獲得的結果更好。華氏的這個記錄保持了 50 年之久，最近，才由 *Vaughan*〔68〕改進爲$\overline{G}\leqslant 2^k$。證明(29)式的方法也特別重要，對後來有很大影響。1943 年，Ю. В. ЛИННИК（林尼克）給出了前述希爾伯特定理（即問題 1）的一個新的初等證明，它曾被選入"數論三珠"之一，而華氏的工作在這裏起了重要作用，*Darvenport* 評價說："這一證明的想法無疑來自哈代一李特伍德方法的某些特性，特別是華氏不等式。"〔72〕

顯然，當k較大時，使$r_{k,s}(n)$的漸近公式成立的$\overline{G}(k)$就可以降低一些，維諾格拉朵夫在 1942 年得到當$k\geqslant 11$時，$\overline{G}(k)\leqslant 20k^2\log k$。1947 年，華羅庚〔46〕給出了 *Tarry* 問題的解數的漸近公式成立的界限，利用該文的方法和結果，他得到了當$k\geqslant 11$時，

$$\overline{G}(k)\leqslant 4k^2\left(\log k+\frac{1}{2}\sqrt{\log k^2}+\frac{1}{4}\log\log k+1\right) \tag{33}$$

19[illegible] 年，維諾格拉朵夫〔71〕又把他自己的結果改進爲$\overline{G}(k)\leqslant 10k^2\log k\ (k>11)$。次年，華

〔47〕利用(27)式，又把(33)改爲：當 $k>11$ 時，

$$G(k) \leqslant 4k^2(\log k + \frac{1}{2}\log\log k + 8) \quad (34)$$

由於 $k^2\log k$ 這個階是很難突破的，所以關鍵是降低其係數。在這個問題上，維氏最後得到 $G(k)\leqslant 2k^2(2\log k+\log\log k+2.5)$，$(k>11)$，比華氏的(33)略好一點。

對於 $G(k)$ 也是一樣，維諾格拉朵夫在 1938 年應用他的中值公式(26)得到，當 k 較大時，有

$$G(k) < 4k\log k + 8k\log\log k + 12k \quad (35)$$

華羅庚在 1939 年指出，利用他新得到的(25)式和維氏原來的方法，"對於 $k\leqslant 15000$，我們可以獲得一個更好的結果"〔44〕。

1947 年，維氏證明了 $G(k)\leqslant k(3\log k+11)$，1957 年，浙江大學的董光昌〔12〕利用與維氏同樣的方法和步驟，對 $G(k)$ 做了一點改進，他得到

$$\begin{cases} G(k) < k(3\log k + 9) & \text{當 } k = 2^m \text{ 時}(m \text{ 是整數}) \\ G(k) < k(3\log k + 7) & \text{當 } k \neq 2^m \text{ 時。} \end{cases}$$

1958 年，陳景潤〔1〕又有新的改進：

$$G(k) \leqslant k(3\log k + 5.2)，\quad (k \geqslant 15)$$

對於較小的 k，華羅庚〔41〕在 1939 年得到了 $G(5)$ 的一個估值。*Hardy* 和 *Littlewood*(1925)得出 $G(5)\leqslant 41$，*James*(1934)把 *Hardy-Littlewood* 方法和 *Landau* 的方法結合在一起得到 $G(5)\leqslant 35$，而 *Estermann*(1937)指出，利用維諾格拉朵夫方法，可以得到 $G(5)\leqslant 29$，華羅庚把上述三種方法結合在一起獲得了 $G(5)\leqslant 28$。此後 *Davenport*(1942)、*Thanigasalam*(1982)和 *Vaughan*(1982)分別把這個界限降低到 23、22 和 21。

最近，山東大學的李紅澤〔59〕應用 *K.Thanigasalam* 和 *Vaughan* 的方法得到了 $G(13)\leqslant 149$，
$G(10)\leqslant 102$，$G(11)\leqslant 118$，其中第一個結果比 *Thanigasalom* 的 $G(13)\leqslant 150$ 稍好一些，後二個與 *Thanigasalam* 的相同，但是獨立得到的。

B. 對於 $g(4)$ 和 $g(5)$ 的估計

陳景潤對於 $g(4)$ 和 $g(5)$ 的研究工作十分重要。由於 $n=2^k\left[(\frac{3}{2})^k\right]-1$ 小於 3^k，所以它只能表示成 2 和 1 的 k 次冪之和，最經濟的表示法是 $\left[(\frac{3}{2})^k\right]-1$ 個 2^k 和 2^k-1 個 1 之和。因此，1772 年，著名數學家歐拉的兒子 *J.A.* 歐拉猜測〔13〕

$$g(k) = 2^k + \left[(\frac{3}{2})^k\right] - 2 \quad (36)$$

當 $k=2,3$ 時，這個結論早已成爲經典，剩下的是 $k\geqslant 4$ 的情況。

Dickson 對 $g(k)$ 的研究工作至爲突出，他在本世紀 30 年代的一系列論文中逐步得到了 $g(k)$ 的值，使這個問題近於解決。其中最重要的是他 1936 年的兩篇文章：一篇題爲"指數是 7—180 的理想華林問題的證明"〔10〕，該文證明了 $7\leqslant k\leqslant 180$ 時，(36)成立。另一篇題爲"華林問題的解"〔11〕。設

$$3^k = 2^k q + r \qquad o \leqslant r < 2^k$$

Dickson 在這裏證明了：當 $k\geqslant 35$ 時，有

（Ⅰ）如果 $r\leqslant 2^k-q-3$，則(36)成立；

（Ⅱ）如果 $r\geqslant 2^k-q+2$，則

$$g(k)=\begin{cases}2^k+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]-2 & 當\ 2^k=\left[\left(\frac{4}{3}\right)^k\right]\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]+\left[\left(\frac{4}{3}\right)^k\right]+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]\\ 2^k+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]-3 & 當\ 2^k<\left[\left(\frac{4}{3}\right)^k\right]\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]+\left[\left(\frac{4}{3}\right)^k\right]+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right]\end{cases}$$

由（Ⅰ）（Ⅱ）知，僅剩 $2^k-q-2\leqslant r\leqslant 2^k-q+1$ 共四種情況未定。*I. Niven*〔64〕在 1944 年對這幾種情況做了研究。1940 年，*S. S. Pillai*〔65〕又證明了 $g(6)=73$，即當 $k=6$ 時，(36)成立。這樣 $g(4)$ 和 $g(5)$ 變成了關鍵問題。

Dickson〔9〕在 1933 年證明了 $37\leqslant g(5)\leqslant 54$。此前，*Wieferich* 和 *Bear* 分別於 1909 和 1913 年得 $G(5)\leqslant 59$ 和 58。同時，*Dickson* 還得到 $19\leqslant g(4)\leqslant 35$。他證明了一個定理：

設 l 是一個整數 $\geqslant 0$，$v=(1-l/L_0)k, L_0>l$，$(vL_0)^{k/(k-1)}\geqslant L_0$，由下式計算 L_t：

$$logL_t=\left(\frac{k}{k-1}\right)^t(logL_0+klogv)-klogv \tag{37}$$

如果所有在 $[l,L_0]$ 內的整數是 s 個非負整數的 k 次冪之和，那麼所有在 $[l,L_t]$ 中的整數是 $s+t$ 個非負整數的 k 次冪之和。

Dickson 利用這個定理和列表法及遞推法求得當 n 小於某個 C 時，$g(k)$ 有一個界限，而當 $n\geqslant C$ 時，用已有的漸近公式可知這個界限也成立。這樣便得到了所需結論。

1959 年、1964 年和 1974 年，陳景潤有三篇論文〔3，4，5〕研究了 $g(5)$ 和 $g(4)$，分別得到了 $37\leqslant g(5)\leqslant 40$，$g(5)=37$；$19\leqslant g(4)\leqslant 27$。這三篇文章所用的方法相同。首先利用前述 *Dickson* 的定理通過簡單的計算得到：當 n 不大於某一數 C 時，$g(k)$（$k=4$ 或 5）滿足規定的界限。然後利用圓法通過估計三角和、計算積分而得到當 $n>C$ 時，$g(k)$ 也滿足規定的界限。他估計積分 $r(n)$ 的一個技巧是，不直接計算原來的積分，而是估計另一等價的積分。例如，他在證 $g(5)=37$ 時，通過大量的預備計算，最後考慮積分

$$r(N)=\int_0^1 T_a^{15}\sum_{\mu}\sum_{\mu'}e^{2\pi i(\mu+\mu')a}e^{-2\pi iNa}da$$

其中 $T_a=\sum\limits_{1\leqslant x\leqslant P}e^{2\pi iax^5}$，$\mu$ 和 μ' 經過所有小於 $\frac{N}{4}$ 並能夠表示成為 11 個正整數的五次方的和者。這樣 $r(N)$ 便是把 N 表示成 37 個五次方之和的表法數。

陳景潤完全解決了 $g(5)$。$g(4)=19$ 是 1984 年由 *Balasubramaniall*、*Dress* 和 *Deshouillers* 獲得的〔7〕。

C. 優弧上的華林問題

現在把 $r(N)$ 在優弧上的積分記作 $r_{1}(N)$，而把劣弧上的積分記作 $r_{2}(N)$，則 $r(N)=r_{1}(N)+r_{2}(N)$。

Hardy 和 *Littlewood* 證明了當 $s\geqslant 2k+1$ 時，有

$$r_{1}(N)=\Gamma^s\left(1+\frac{1}{k}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{s}{k}\right)S(N)N^{s/k-1}+O(P^{s/k-1-\delta}) \tag{38}$$

[illegible]利用他得到的(18)式，改進了這個結果：當 $s\geqslant max(5,k+1)$ 時，(38)仍

成立。由於 $G(k)\geqslant k+1$，所以這是可能的最好結果。因而對於 $r(N)$ 的研究已轉化爲對奇異級數 $S(N)$ 和 $r_{1_2}(N)$ 的研究，亦即對完整指數和及 *Weyl* 和的研究。

三、華林問題的各種變體

3.1 多項式的華林問題

多項式的華林問題是華林問題最重要的推廣形式。中國學者最先接觸的就是這類問題，華羅庚在這方面的貢獻尤爲突出，得到一致好評。

設 $P(x)$ 爲 k 次整值多項式，現在的問題是把正整數 n 表示成 $P(x)$ 的 s 個值之和。早在古希臘時代，就定義了所謂的多邊形數，稱

$$P_{m+2}(x)=x+m(x^2-x)/2$$

爲第 x 個 $m+2$ 邊形數。例如 $P_3(x)=x(x+1)/2$ 爲三角形數。1636 年，*Fermat* 斷言，他發現了下述優美的定理：每一個非負整數是 $m+2$ 個 $m+2$ 邊形數 $P_{m+2}(x)\,(x\geqslant 0)$ 的值之和。*Cauchy* 首先發表了這個定理的證明。1770 年，當華林提出他的著名問題時，也曾猜測：每一個"具有適當形式"的正整數是一個多項式 $f(x)$ 的有限個值之和。不少數學家都研究過多項式的華林問題，如：*Gauss*，*Barlow*，*Cauchy*，*Legerdre*，*Liouville*，*Réalis*，*Maillet*，*Griffiths*，等等。一個相當著名的結果是 *Kamke* 在 1921 年得到的〔54〕，被稱爲 *Waring-Hilbert-Kamke* 定理：

設 $f(x)$ 是 $k(\geqslant 2)$ 次的以有理數爲係數的多項式，其中 x^k 的係數 >0，且當 $x\geqslant 0$ 時，$f(x)$ 爲非負整數，則每一個非負整數是 $f(x)$ 的有限個值和有限個 1 之和。

這個定理説明正整數表成多項式之和是可能的，後來維諾格拉朵夫和 *Landau* 分別用 *Hardy-Littlewood* 方法再次證明了它。

下面就來介紹中國學者的工作。

A. 三次多項式的華林問題

1928 年，楊武之首先在這個問題上取得新成果。在他的博士論文中，用初等方法證明了："所有正整數都可表示成多項式 $\frac{x^3-x}{6}\,(x\geqslant 0)$ 的九個值之和"。獲得這個結果的基礎是一個重要的引理：存在 x，使 $(x^3-x)/6$ 對於模 3^n 同餘於給定的整數。1928 年 4 月 6—7 日，美國數學會在芝加哥大學召開了第 261 次會議暨第 29 次西部例會，楊武之在會上報告了他的工作〔77〕。後來，他的工作發表在《清華大學理科報告》第一卷上。

他的結果在當時是領先的。如果用 $g(f(x))$ 和 $G(f(x))$ 表示可把 n 和 N 表成 $f(x)$ 的值的個數，楊武之得到了 $g((x^3-x)/6)\leqslant 9$。在他之前，1895 年，*Maillet* 得到：每一個不小於 19272 的整數是 $(x^3-x)/6$ 的至多 12 個值之和，即 $G((x^3-x)/6)\leqslant 12$。到 1933 年，*Dickson* 得到 $G(x+k(x^3-x)/6)\leqslant 9$，其中 $x\geqslant 0$，$(k,3)=1$。*James* 得到 $G((x^3-x)/6)\leqslant 8$。楊武之的方法也有一定價值，後來不少人用它研究同類問題。在中國，他的工作具有首創意義。

華羅庚也是以研究同樣的問題開始他的工作的。1934 到 1935 年，他改進了楊武之和 *Dickson* 的結果，獲得下列定理〔24,25,26,28〕：

（Ⅰ）每一個整數可以用無窮多種方式表示成 x 的多項式 $f(x)=x+\frac{\varepsilon}{6}(x^3-x)$ 或 $f(x)=$

$\frac{x^3-x}{6}$的七個值之和，這裏 x 取整數。

(Ⅱ)所有大整數是三次多項式$\frac{x^3+5x}{6}$($x>0$ 的整數)的至多八個值之和；所有大偶整數是$\frac{x^3+2x}{3}$($x>0$ 的整數)的至多八個值之和，從而所有大整數也是$\frac{x^3+2x}{3}$的至多九個值之和、其中九個值中有一個是 0 或 1。

(Ⅲ)滿足一定條件的大數可表成 $Dx+E\frac{x^3-x}{6}$的八個值之和，其中$(D,E)=1$。

(Ⅳ)作爲(Ⅲ)的特例有：所有大整數是 $Dx+\frac{x^3-x}{6}$的八個值之和；所有大偶數是 $Dx+\frac{x^3-x}{3}$的八個值之和。

上述結果都是用初等方法獲得的，其中采用了 *Landau*，楊武之和 *James* 等人的思想和方法。

1940 年，華羅庚在印度數學會雜志上發表"三次多項式的華林問題"一文〔43〕，該文曾投到《數學學報》(*Acta Arithmetica*)上，因第二次世界大戰而未能發表。文中用圓法獲得了一般的三次整值多項式的華林問題的 $G(P(x))$的估值：對於三次整值多項式

$$P(x)=\frac{1}{6}a(x^3-x)+\frac{1}{2}b(x^2-x)+cx+d$$

a,b,c,d 爲整數，$(a,b,c)=1$，$a>0$，有 $G(P(x))\leqslant 8$。這個結果改進了〔35〕中的結果。

B. 一般多項式的華林問題

的數。即

$$G(P_1(x)) \leqslant K(k-2)+5$$

(Ⅱ)當 $k \geqslant 5$ 時，$x>\lambda$，λ 同前，$G(P_2(x)) \leqslant K(k-2)+5$

(Ⅲ)當 $k \geqslant 5$，$x>\lambda$，λ 同前，有：幾乎所有① 的整數是 $P_1(x)$的 $\frac{1}{2}(k-2)K+3$ 個值之和。

(Ⅳ)當 $k \geqslant 6$，$x>\lambda$，λ 同前，有：幾乎所有的整數是 $P_2(x)$的 $\frac{1}{2}(k-2)K+3$ 個值之和。

(Ⅴ)$k>5$，$x>\lambda$，λ 同時，則

$$G(P_1(x)) \leqslant \frac{1}{2}(k-2)K+k+5+\left\{\frac{(k-2)log2-logk+log(k-2)}{logk-log(k-1)}\right\}$$

1937 年，文〔35〕進一步得到：

(Ⅵ)當 $k>20$ 時，有 $G\{P_1(x)\} \leqslant \frac{1}{3}(2^{k-1}-1)$；進一步地，如果 $P_1(x)$的最高項係數是 $a/k!$，$(a,k)=1$，則，$G\{P_1(x)\}=O(2^{\epsilon k})$，這裏任 $\epsilon>0$。

(Ⅶ)當 $k>20$，則：$G\{P(x)\} \leqslant 3^{\frac{1}{2}k}2^{\frac{1}{2}(k-1)-7}k$；

$$G\{P(x)\}=O(k^3 2^{k-1})$$

進而，如 $P(x)$的最高項係數爲 $a/k!$，且$(a,k)=1$，則

$$G\{P(x)\}=O(3^{k(\frac{1}{2}+\epsilon)})$$

(Ⅷ)設 $r_{P_1,P_2,\cdots,P_s}(N)$表示丟番圖方程

$$N=P_1(x_1)+P_2(x_2)+\cdots+P_s(x_s), \qquad x_v \geqslant 0 \tag{41}$$

的解數，其中 $P_i(x)$的定義如(38)，它們的首項係數爲 a_i。則當 $s>10k^3logk$，$k>20$ 時有

$$r_{P_1,\cdots,P_s}(N)=(\prod_{v=1}^{s} a_v^{\ -1/k})\Gamma^s(1+1/k)\Gamma^{-1}(sk)S(N)N^{s/k-1}+O(P^{s-k-(1-\delta)})$$

1940 年，文〔42〕在前幾文的基礎上繼續研究 $G(P(x))$，改進了前述結果。得到：

(Ⅸ)如果對任何素數 p，有

$$P(x) \not\equiv P(o)(mod\ p),$$

則有　$G(P(x)) \leqslant (k-1)2^{k-1}$。

(Ⅹ)設 $H_k(x)=2^{k-1}F_k(x)-2^{k-2}F_{k-1}(x)+\cdots+(-1)^{k-1}F_1(x)$

$$i!\,F_i(x)=x(x-1)\cdots(x-i+1)$$

則當 $k \geqslant 4$ 時，有　$G(H_k(x))=\begin{cases}2^k-1 & 當\ k\ 爲奇數\\ 2^k & 當\ k\ 爲偶數\end{cases}$

(Ⅺ)$G(\frac{1}{k!}x(x-1)\cdots(x-k+1)) \leqslant 2k+2m+5$

其中　$m=\left[\frac{log\frac{1}{2}b+log(1-2/k)}{logk-log(k-1)}\right]$

$$b=\begin{cases}k^3(logk+1.25loglogk^2) & 當\ k \geqslant 15\\ 2^{k-1} & 當\ k<15\end{cases}$$

---

① 設 $a(\xi)(\xi>0)$表示不具有性質 R 的正整數 $m(<\xi)$的個數，且 $\lim\frac{A(\xi)}{\xi}=0$，則稱幾乎所有的整數有性質 R。

當 $P(x)$ 是整係數多項式時，華羅庚得到的結果已在 § 2.2.A 中說過。但應指出，他宣布已經得到 $G(P(x))\leqslant 17$，這裏 $P(x)$ 是 4 次的〔38〕。

獲得上述結果的方法基本上是相同的，粗略地講，包括兩個大的步驟。首先，利用 § 2.1 中的結果估計 $r(N)$ 在劣弧和優弧上的積分，獲得漸近公式。然後證明奇異級數 $S(N)$ 對於適當的 $s>s_0$ 時大於 0。設

$$M(n)=M(s,P,m,n)=M(P_1,\cdots,P_s,m,n)$$

是同餘式方程 $n\equiv P_1(x_1)+\cdots+P_s(x_s)(mod\ m)$，$0\leqslant x_i\leqslant m_i'$ 的解的個數。當 $m=p^l$ 時，命

$$N(p^l,n)=N(s,P,p^l,n)=N(P_1,\cdots,P_s,p^l,n)$$

爲此同餘式當 $P_i'(x_i)$ 至少有一與 P 互素時的解數。通過研究 $M(n)$ 和 $N(P^l,n)$ 獲得了它們和奇異级數的關係。而且有定理：A. 如果對 s_0 有 $N(s_0,P,p^\gamma,n)>0$ 對所有素數 p 和所有整數 n 成立，則當 $s\geqslant max(s_0,2k)$ 時，有 $S(N)\geqslant D>0$。B. 如果 $M(P_1,\cdots,P_{s-1},p^l,n)>0$ 對所有整數 n 成立，則 $N(P_1,\cdots,P_{s-1},P_s,p^l,n)>0$ 也對所有整數 n 成立。因此證明 $S(N)>0$，就轉化爲證明 $N(s,P,p^l,n)>0$。這是華氏研究華林問題的一個途徑。

陳景潤〔2〕對 $g(x(x+1)\cdots(x+k-1)/k!)=g(\psi_k)$ 做了研究，得到了它的上下界：

$$k\ ln\ k-k\leqslant g(\psi_k)\leqslant 5(k\ ln\ k+12)$$

華羅庚也曾得到了 $g(\psi_k)$ 的同樣的下界。這裏改進了 *Heraeb* 的估計：

$$k+\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{k}{3}\right]\leqslant g(\psi_k)\leqslant 6k\ ln\ k+9k\ ln\ ln\ k$$

3.2 華林—哥德巴赫問題

這是把華林問題和哥德巴赫問題結合在一起提出來的問題。1742 年，德國的哥德巴赫(*C. Goldbach*，1690—1764)提出了他的著名猜想：

①每一個不小於 6 的偶數都是兩個奇素數之和；

②每一個不小於 9 的奇數都是三個奇素數之和。

現在的問題是要研究，把 n 表成 s 個素數的 k 次冪之和：

$$n=p_1^k+p_2^k+\cdots+p_s^k \tag{42}$$

的解數和可能性。華羅庚在這個問題上做出了開創性貢獻，他的《堆壘素數論》就是一部這方面的專著。維諾格拉朵夫盛贊華氏的貢獻，並"介紹讀者去看華羅庚的優秀專著"。

設 $k\geqslant 4$，$a=1/k$，以及

$$b=\begin{cases}k^3(log\ k+1.25\ log\ log\ k^2) & k\geqslant 15\\ 2^k-1 & k<15\end{cases} \tag{43}$$

$$m=\left[\frac{log\ \frac{1}{2}b+log(1-2a)}{log\ k-log(k-1)}\right] \tag{44}$$

又設 $p^\theta\parallel k$(即 $p^\theta|k,p^{\theta+1}\nmid k$)，且

$$K=\prod_{(p-1)|k}p^r,\ r=\begin{cases}\theta+2 & 當\ p=2,2|k\\ \theta+1 & 其他情況。\end{cases}$$

華羅庚最初得到〔40〕：

（Ⅰ）當 $s \geqslant s_0 = 2k + 2m + 7$ 時，對於每一個充分大的整數 N，如果 $N \equiv s(mod K)$，則 N 是 s 個素數的 k 次冪之和。

由於當 k 是奇數時，$K=2$，所以作爲（Ⅰ）的特例有：

（Ⅱ）當 k 是奇數時，每一個充分大的奇數是 $2k+2m+7$ 個素數的 k 次方之和；從而，每一充分大的整數可表示成 $2k+2m+8$ 個素數的 k 次方之和

$$b=\begin{cases}2k^2(2\log k+\log\log k+3) & \text{當 } k>12,\\ 2^{k-1} & \text{當 } k\leqslant 12\end{cases}$$

(Ⅶ)　$H(4)\leqslant 15$，$H(5)\leqslant 25$，$H(6)\leqslant 39$，$H(7)\leqslant 55$，$H(8)\leqslant 75$

在這些定理中，(Ⅵ)比(Ⅴ)精密，而(Ⅶ)比(Ⅵ)中的相應結果又精密一些。華氏獲得這些結果的主要方法在1938年已經基本形成，在《堆壘素數論》中又做了改進和完善。作爲圓法的應用，包括兩個步驟，一是在適當的優弧和劣弧上利用三角和的結果來估計積分的值，以獲得解數的漸近公式或界限。二是確定使奇異級數大於零的條件。這兩步中都體現了相當好的技巧。這裏粗略地看一下獲得(Ⅵ)的方法。設 $a=\frac{1}{k}$，

$$T(\alpha,P)=\sum_{P<p\leqslant 2P}e(p^k\alpha)$$

$$T_0^*(\alpha,h,q)=\frac{W_{h,q}}{\psi(q)}\sum_{P^k<n\leqslant(2P)^k}\frac{e(n\beta)}{n^{1-a}\log n}$$

$$T_i(\alpha)=T(\alpha,2^{-i}P^{(1-a)^i}),\qquad i=0,1,\cdots,m+1$$

$$Q(\alpha)=T_1(\alpha)\cdots T_m(\alpha)T_{m+1}^2(\alpha)$$

$$T_0^{2k+3}(\alpha)Q^2(\alpha)=\sum_n r'_{2k+2m+7}(n)e(n\alpha)\tag{47}$$

則有：

$$r'_{2k+2m+7}=\int_0^1 T_0^{2k+3}(\alpha)Q^2(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha$$

$$=\Big(\sum_E\int_E+\sum_m\int_m\Big)T_0^{2k+3}(\alpha)Q^2(\alpha)e(-n\alpha)d\alpha$$

而

$$\Big|\sum_m\int_m T_0^{2k+3}(\alpha)Q^2(\alpha)d\alpha\Big|\leqslant\sum_m\int_m\Big|T_0^{2k+3}(\alpha)-T_0^{*2k+3}(\alpha)\Big|Q^2(\alpha)d\alpha$$
$$+\sum_m\int_m\Big|T_0^{*2k+3}(\alpha)\Big(Q^2(\alpha)-\Lambda^2\Big(\frac{W_{h,q}}{\psi(q)}\Big)^{2m+4}\Big|d\alpha$$
$$+\sum_m\Big(\int_0^1-\sum_m\int_m\Big)\Big|T^{*2k+3}(\alpha)\ \Lambda^2\Big(\frac{W_{h,q}}{\psi(q)}\Big)^{2m+4}\Big|d\alpha$$

通過對右端各項的估計，便得到了 $r'_{2k+2m+7}$ 的界限。設 $M_s(p^t,N)$ 爲同餘式

$$x_1^k+\cdots+x_s^k\equiv N(\bmod p^t),\quad p\nmid x_1\cdots x_s,0<x_v<p^t,$$

的解數，則有

$$\psi(p^t)^{-s}p^t(M_s(p^t,N)=1+\sum_{d=1}^{t}B_s(N,p^d)$$

利用此式把 $S(N)$ 轉化爲研究 $M_s(p^t,N)$，從而獲得使 $S(N)\geqslant D>0$ 的條件，由此便決定了 $H(k)$。

另外，還有不少人研究了把整數 n 分解成素數的某些形式的和的問題[36,37,7]，這也屬於華林—哥德巴赫型的問題。

3.3 簡易華林—卡姆克問題及二次型的華林問題

設　$n=\varepsilon_1x_1^k+\varepsilon_2x_2^k+\cdots+\varepsilon_sx_s^k$，　$\varepsilon_i=\pm1(i=1,\cdots,s)$　(48)

簡易華林問題即是要確定使(48)成立的 s 以及它的解數等問題。命 $v(k)$ 表示(48)可解的最小

s，則它對應於華林問題中的 $g(k)$。193[illegible] 年，*V. Vesely* 證明了 $v(k)$ 存在。接着 *Wright*〔74〕在 1934 年得到

$$v(k) \leqslant 2^{k-1} + \frac{1}{2}(k!)$$

這是一個相當平凡的估計，但利用它可以簡單地證明 s 的存在性定理。事實上，*Wright* 同時又改進爲：

$$v(k) \leqslant 2^{k-1} + \triangle(k)$$

其中 $\triangle(k,m)$ 表示把 $mod\ m$ 的每一個剩餘表示成至多 s 個 $\pm m_i^k$ 之和的最小 s，$\triangle(k)=\triangle(k,k!)$。以及 $v(k)\leqslant 2^{k-1}+4k$。他還研究了 $v(k)$ $(2<k<20)$ 的具體值〔76〕。

利用 $(x+1)^3+(x-1)^3-2x^3=6x$，*Mordell*〔63〕在 1936 年證明了除極少一部分數不能確定外，大多數數適合 $v(3)=4$。柯召〔55〕列出了一張表，把 100 以内的數分解爲 4 個立方之和，且每個數均分解爲 $x^3+y^3+2z^3$ 的形式（僅兩個例外：$76=10^3+7^3+4^3-11^3$，$99=5^3-3^3+1^3$）。他這樣做是爲了説明或許 $v(3)=4$ 是正確的。

華羅庚研究了所謂的簡易華林—卡姆克問題，他定義 $v\{f(x)\}$ 爲使每一個整數（正的或負的）n 可表示成下列形式

$$n = \varepsilon_1 f(m_1) + \cdots + \varepsilon_s f(m_s) + c, \qquad \varepsilon_i = \pm 1 \tag{49}$$

的 $s-|c|$ 的最小值。其中 $f(x)$ 是整值多項式，m_i 和 c 是整數或 0。1936 年，他用 *Wright* 引入的方法研究 $v\{f(x)\}$，獲得〔32〕：

$$v\{f(x)\} \leqslant 2^{k-1} + (a_{k-1}, a_{k-2})$$

這裏，$$f(x) = a_0P_k(x) + a_1P_{k-1}(x) + \cdots + a_{k-1}P_1(x) + a_k,$$

而 $$i!\,P_i(x) = x(x-1)\cdots(x-i+1)$$

1937 年，華又研究了簡易華林—卡姆克問題的推廣形式，即聯立方程組

$$\sum_{i=1}^{s} \varepsilon_i f_j(x_i) = n_j \qquad j = 1,2,\cdots,m$$

同時可解的問題〔34〕。關於 s 的存在性，獲得以下定理：

s 存在的充要條件是：矩陣 (a_{ij}) 的秩 l 以及 (a_{ij}) 的 l 行的餘子式的最大公因子與由 (a_{ij}) 增加一行常數而得到的增廣矩陣的相應結果相同。而且，s 若存在，則 $s\leqslant 2^k-1$。

柯召〔56〕在 1936 年研究了具有綫性形式的平方的華林問題，設

$$f(x,y) = ax^2 + 2hxy + by^2$$

是一個正定二次型或半正定的二次型。1930 年，*Mordell* 提出了：求最小的 s，使得對所有可能的 a,h,b，存在整數 $A_i,B_i(i=1,2,\cdots,s)$ 滿足

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{s}(A_ix + B_iy)^2 \tag{50}$$

對所有 x,y 成立。並證明了 $s=5$。對於 $s<5$ 時，他給出了 (50) 成立的條件。*P. Erdös* 又提出了：對於

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{s}\varepsilon_i(A_ix + B_iy)^2, \qquad \varepsilon_i = \pm 1 \tag{51}$$

$s=4$ 是否成立？

柯召給出了 *Erdös* 問題的否定答案，並通過研究 *Mordell* 的可解條件，得到：

當 $s=5$ 時，有：

(*ia*)　$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon_4=\varepsilon_5=1$，對所有正定和半正定型，(51)成立。

(*ib*)　$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon_4=\varepsilon_5=-1$，對所有負定和半定型，(51)成立。

(*iia*) $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon_4=1$，$\varepsilon_5=-1$ 除負定型外，(51)成立。

(*iib*) $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon_4=-1$，$\varepsilon_5=1$，除正定型外，(51)成立。

(*iii*) $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=1$，$\varepsilon_4=\varepsilon_5=-1$ 或 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=-1$，$\varepsilon_4=\varepsilon_5=1$，則(51)對所有二次型成立。

對於 $s=4$，*Mordell* 獲得了(50)成立的充要條件：$ab-h^2\neq 4^\rho(8\sigma-1)$，其中 $\rho\geqslant 0$，$\sigma\geqslant 0$ 爲整數。利用他的方法，柯召證明了(51)成立的條件是：

當 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1$，$\varepsilon_3=\varepsilon_4=-1$，則有：如果 $a\equiv 2(mod\ 4)$，$h\equiv 1(mod\ 2)$，$b\equiv 2(mod\ 4)$，那麼(51)不可能，在其他所有情況下(51)均成立。

當 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\pm 1$，$\varepsilon_4=\mp 1$，時，則有：如果 $d=h^2-ab$ 是完全平方，那么表達式(51)存在。如果 d 不是一個平方數，設 $d=\triangle_1^2\triangle_2$，$a=a_1^2a_2$，這裏 $|a_2|\geqslant 1$，$|\triangle_2|>1$ 是非平方整數。又設 ω 是 $a_2/[a_2,\triangle_2]$ 的所有與 ε_4 同餘($mod 4$)的素因子之積。那麼表達式(51)存在的充要條件是：①$\varepsilon_4 f(x,y)$不是一個正定型；②$\triangle_2$ 是 ω 的二次剩餘；③如果 $d=4^\rho(8\sigma-1)$，那么 $a\neq 2^{\rho_1}(4\sigma_1+\varepsilon_4)$，這裏 $\rho,\rho_1,\sigma,\sigma_1$ 是整數。

柯召還討論了 $s=2$ 和 3 時，(51)存在的條件。

對於 n 個變量的正定二次型，*Mordell* 在 1932 年證明了每一個具有有理係數的 n 個變量的正定二次型可表示成 $n+3$ 個帶有有理係數的綫性形式的平方之和。柯召給出了這個定理的一個更簡單的證明[57]，並證明了這是最好的可能[58]。

華羅庚也曾在 1937 年順便得到了一個關於二次型的簡易華林問題的結果[33]：每一個以 $k!$ 的倍數爲係數的齊次二元型可以表示成至多 $\left(\frac{1}{2}k+1\right)2^{k-2}$ 個整係數的綫性形式的 k 次冪之和或差。

3.4 聯立華林問題及其推廣

這一節主要討論幾個不同指數的華林問題同時可解的問題。設丢番圖方程組

$$x_1^h+\cdots+x_s^h=N_h \qquad (h=1,2,\cdots,k) \qquad (x_i \text{ 正整數}) \tag{52}$$

的解數爲 T。文[44]指出，§2.2 中(25)的結果表明對於那裏的 s 有 $T=O(P^{s-\frac{1}{2}k(k+1)+\varepsilon})$。在證明關於指數和的公式時，經常有可能涉及 T 的結果，茲不備述。

設 $F_1(x,y)$，$F_2(x,y)$，$\cdots$，$F_{k+1}(x,y)$是 $k+1$ 個 k 次整值多項式，則有

$$F_i(x,y)=\sum_{\substack{\mu+\nu\leqslant k\\ \mu\geqslant 0,\nu\geqslant 0}} a_{\mu\nu}^{(i)}P_\mu(x)P_\nu(y)$$

其中 $\mu!P_\mu(x)=x(x-1)\cdots(x-\mu+1)$，　$P_0(x)=1$，各 a 是整數，用△表示行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{0k}^{(1)} & \cdots & a_{k0}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{0k}^{(k+1)} & \cdots & a_{k0}^{(k+1)} \end{vmatrix}$$

華羅庚[33]在 1937 年得到了聯立簡易華林－卡姆克問題的解的存在性定理，並給出了 s 的界限：

如果$\triangle\neq0$，那麼存在整數$m_1,m_2,\cdots,m_{k-1}$和s，使得對任一組$n_i\equiv m_i(mod\,\triangle)$，可選取適當的$x_i$，$y_i$和$\varepsilon_i=\pm1$滿足方程組

$$\sum_{i=1}^{s}\varepsilon_iF_j(x_i,y_i)=n_j,\qquad(j=1,\cdots,k+1)\tag{53}$$

且可取s爲$\left[\frac{1}{2}k+1\right]2^{k-1}$。進一步地，如$\triangle=\pm1$，則存在$s$使(53)對任一組$n_i$都是可解的。

華羅庚還研究了(53)的解數$H(F_1,\cdots,F_t)$〔30〕。得到

$H(F_1,F_2)\leqslant k2^k-1$，$H(F_1,\cdots,F_t)=O(2^tk^{t-1})$，

這裏不要求$F_1,\cdots,F_t$都是k次的，只要$max(\partial F_i)=k$即可，但它們需滿足：對於任何素數p，不存在整數$q_1,\cdots,q_t$和$l(>1)$使得$q_1F_1+\cdots+q_tF_t\equiv l(mod\ p)$，$(q_1,\cdots,q_t)=1$。

如果只允許(52)中的x_i取素數p_i，《堆壘素數論》俄文初版中得到了當$s\geqslant s_0=4.14k(k+1)(k+2)logk$ $(k\geqslant11)$時解數T有一個漸近公式。文〔46〕把這個s_0改進爲

$$s\geqslant s_0=k^2(4logk+2\sqrt{logk^2}+loglogk+9)\qquad(k\geqslant11)$$

1953年，他又把s_0改爲〔50〕：

k	2	3	4	5	6	7	8	$\geqslant9$
s_0	7	19	49	127	315	763	1781	$2k^2(3logk+loglogk-4)$

同時，當充分大的N_k，N_{k-1}，$\cdots$，N_1滿足"正可解"和"相合可解"(即"同餘可解")條件時，祇要

$$s\geqslant2k^2+3+klog(60k^2logk)/log\frac{1}{1-a}\sim3k^2logk,$$

(52)就存在素數解。

3.5 華林問題的其他推廣形式

與簡易華林問題類似的一個推廣形式是：是否每一個充分大的整數可以表示成s個與給定的正數λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_s幾乎成比例的正數的k次冪之和？不失一般性，設$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_s=1$，是否存在$m_1,\cdots,m_s$使

$$n=m_1^k+\cdots+m_s^k,\qquad|\lambda_in-m_i^k|=o(n^{1-\beta})\text{或}o(n)\tag{54}$$

*Wright*對這個問題做了大量的研究，證明了當$s\geqslant2^{k-1}(k-2)+5$時，(52)的解數有一個漸近公式〔75〕。1936年，華羅庚研究了華林-卡姆克問題在這個方向上的推廣形式〔35〕。他指出，對$s\geqslant2^{k-1}(k-2)+5$，*Wright*的漸近公式在這裏也成立。並對小指數的情況做了具體研究。設$G^*(p(x))$爲使華林-卡姆克問題在"幾乎成比例"條件下是可解的最小s，其中$p(x)$滿足條件：不存在$c,d(>1)$使$p(h)\equiv c(mod\ d)$對所有x成立。他的結果主要有

（Ⅰ）$p(x)$是三次整值多項式，則$G^*(p(x))\leqslant9$。

（Ⅱ）$G^*\{\frac{1}{12}A(x^4-x^2)+Bx^2\}\leqslant26$，$(A,6B)=1$。

（Ⅲ）$G^*\{\frac{1}{12}A(x^4-x^2)+Bx^2\}\leqslant31$，$(A,B)=1$。

（Ⅳ）$G^*(\partial p(x)=4)\leqslant65$，$\partial p(x)$是$p(x)$的次數。

（Ⅴ）$G^*(\partial p(x)=5)\leqslant81$。

（Ⅵ）　$G^*(p(x))\leqslant 2304$，$p(x)$是祇含偶數項的 6 次整值多項式。

（Ⅶ）　$G^*(\partial p(x)=6)\leqslant 4627$

（Ⅷ）　$G^*(\partial p(x)=7)\leqslant 4691$

對於帶權的華林問題，最早是由 *Dickson* 開始研究的，他用$(a_1,\cdots,a_s)$表示 $a_1x_1^k+a_2x_2^k+\cdots+a_sx_s^k$，$a_i$ 是正整數。顯然 $min\sum a_i=g(k)$。楊武之證明了：當 $k=7$ 時，$s>10$，且當 $s=12$ 時，(1,1,2,3,4,5,7,9,10,15,26,60)代表了所有不小於 16384 的整數。若令 C_n 表示 n 個立方之和，*Dickson* 在 1928 年獲得了把正整數表示成 C_n+lx^3 的若干結果，楊武之則獲得：①超過某限的整數可表示成 $C_7+rx^3(r=3,5,7,8)$的形式；②每一個大於 k 的整數若是奇數的二倍，則可表成 C_7+2x^3。後來，*Huston* 對這個問題做了更加深入細致的研究。

四、簡短的結語

衆所周知，圓法、指數和的估計以及維諾格拉朵夫方法在解析數論中具有重要意義，華林問題的核心正是它們。在中國，華林問題的歷史在一定程度上代表了中國現代數論研究的早期歷史。因此，其意義十分重大。

這個問題在中國始於楊武之的工作。楊氏 20 年代對數論的學習和研究，不僅把現代數論引入了中國，而且爲培養人材奠定了良好的基礎。他在清華大學的教學對於華羅庚和柯召等人從事數論研究的影響很大。華羅庚曾表示："引我走上數論道路的是楊武之教授。"

1934 年到 1941 年，是中國學者研究華林問題的高潮期。華羅庚於 1934 年首次發表這方面的論文，1941 年初完成了他的專著《堆壘素數論》；柯召也在這段時間內展開了自己的研究，他們發表了 20 多篇論文。華氏不等式和維-華中值定理的出現，爲華林問題的研究做出了重要貢獻。證明 $\tilde{G}(k)\leqslant 2^k+1$ 的方法和這個結果本身都十分有趣，引人入勝。華氏 1949 年對維氏中值定理的再次改進和 1957 年對優弧上的華林問題的研究以及對《堆壘素數論》的修訂，是幾個新的貢獻。陳景潤對 $g(4)$和 $g(5)$的估計對於最終解決 $g(k)$的估計也是十分重要的。在華林問題的變體上，中國學者的貢獻不亞於他們在主干上的工作，特別是在多項式的華林問題以及華林-哥德巴赫問題上走在了世界前列。在華林問題的研究史上，早期的幾個重要里程碑已在本文第一節中述及。無疑，中國學者的重要工作也應列入其中，尤其是華羅庚的傑出貢獻。

正如一些研究者所指出的那樣："華羅庚的數論論文，實際上是本世紀 30 至 40 年代數論舞臺上重要活動的綫索。"〔14〕直到 1941 年爲止，華氏的主要工作就是對華林問題的研究，這個事實說明了追踪華林問題在中國的歷史軌迹，對於研究中國現代數論史的意義。

在結束本文的時候，筆者願借機會對李迪、李文林和袁向東諸位教授表示誠摯的感謝，没有他們的指導和幫助，本文是難以完成的。同時，筆者也對中國科學院數學研究所開放委員會對於本文的資助表示感謝。

參考文獻

〔1〕　陳景潤："華林問題中 $G(k)$的估值"，《數學學報》，8(1958)，253－257。

〔2〕 陳景潤："華林問題中 $g(k)$ 的估值"，《數學學報》，9(1959)，264－270。

〔3〕 陳景潤："華林問題 $g(5)$ 的估值"，《科學記錄》，3(1959)，327－330。

〔4〕 陳景潤："華林問題 $g(5)=37$"，《數學學報》，14(1964)，715－734，又見《中國科學》VIII(1964)，1547－1568。

〔5〕 陳景潤："華林問題 $g(4)$ 的估值"，《數學學報》，17(1974)，131－142。

〔6〕 *Chen Jingrun*，*On Professor Hua's Estimate of Exponential Sums*，*Sci. Sin* 20(1977)，711－719.

〔7〕 *Chen Jingrun and Pan Chengbiao*（陳景潤和潘承彪），*Analytic Number Theory in China* Ⅰ，*Number Theory and its Applications in China*（王元，楊重俊和潘承彪主编），*Contemporary Mathematics*，*Vol*. 77，*Providence*：*AMS*，1988，*pp*. 1－17.

〔8〕 *Dickson*，*L. E.*，*History of the Theory of Numbers*，*Vol*. Ⅱ，*Chap*. 24，*New York*，1952.

〔9〕 *Dickson*，*L. E.*，*Recent Progress on Waring's Theorem and its Generalizations*，*Bull. of Am. Math. Soc*. 39(1933)，701－727.

〔10〕 *Dickson*，*L. E.*，*Proof of the Ideal Waring Theorem for Exponents* 7－180，*Am. Jour. of Math*. 58(1936)，521－529.

〔11〕 *Dickson*，*L. E.*，*Solution of Waring's Problem*，同上，530－535.

〔12〕 董光昌："華林問題"，《數學進展》，3(1957)，602－607。

〔13〕 *Euler*，*L.*，*Euler's Opera Postuma*，Ⅰ，1862，203－4，附錄。

〔14〕 *Halberstam*，*H.*，*Loo-Keng Hua*：*Obituary*，*Acta Arith*.，轉引自王元〔72〕.

〔15〕 *Hardy*，*G. H. and Littlewood*，*J. E.*，*Some Problem of "Partitio Numerorum"* Ⅰ，*A New Solution of Waring's Problem*，*Göttingen Nachrichten*，1920，33－54.

〔16〕 *Hardy*，*G. H. and Littlewood*，*J. E.*，同上，Ⅱ，*Proof That Every Large Number Is the Sum of at Most* 21 *Biquadrates*，*Mathematische Zeitschriet*，9(1921)，14－27.

〔17〕 *Hardy*，*G. H. and Littlewood*，*J. E.*，同上，Ⅳ，*The Singular Series in Waring's Problem and the Value of the Number* $G(k)$，同上，12(1922)，161－188.

〔18〕 *Hardy*，*G. H. and Littlewood*，*J. E.*，同上，Ⅵ，*Further Researches in Waring's Problem*，同上，23(1925)，1－37.

〔19〕 *Hardy*，*G. H. and Littewood*，*J. E.*，同上，Ⅶ，*The Number* $\Gamma(k)$ *in Waring's Problem*，*Proc. of the London Math. Soc.*，*Ser*. 2，28(1928)，518－542.

〔20〕 *Hardy*，*G. H. and Ramanujan*，*S.*，*Asymptotic Formulae for the Distribution of Integrers of Various Types*，同上，16(1917)，112－132.

〔21〕 *Hardy*，*G. H. and Ramanujan*，*S.*，*Asymptotic Formulae in Combinatory Analysis*，同上，17(1918)，75－115.

〔22〕 *Hilbert*，*D.*，*Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahlnter Potenzen* (*Waringsche Problem*). *Nachrichten von der Königlichen Gesellchaft der Wissenschaften zu Göttingen*，*mathematisch-physikalische Klasse aus den Jahren* 1909，17－36；*Math*，*Annalen*，67(1909)，281－300.

〔23〕 *Loo-Keng Hua*(華羅庚), *Waring's Problem for Cubes*, *Bull. Calcutta Math. Soc.* 26 (19340, 139－140.

〔24〕 華羅庚, *The Representation of Integers As Sums of the Cubic Function* $(x^3-5x)/6$, *Tohoku Math. Journal*, 41(1935), 356－360.

〔25〕 華羅庚, *On the Represeutation of Integers By the Sums of Seven Cubic Functions*, 同上, 41(1935), 361－366.

〔26〕 華羅庚, *The Representation of Integers As Sums of Cubic Function* $(x^3+2x)/3$, 同上, 367－370.

〔27〕 華羅庚, *On An Easier Waring-Kamke Problem*, *Sci. Repts, Tsing Hua Univ.*, *A*₃ (1935), 247－260.

〔28〕 華羅庚, *On Waring's Theorems with Cubic Polynomial Summands*, *Math. Ann.*, Ⅱ (1935), 622－628.

〔29〕 華羅庚, *On Waring's Problem With Polynomial Summands*, *Amer. Journal Math*, 58 (1936), 553－562; 又見 *Chinese Math. Soc.* 1 (1936), 23－61.

〔30〕 華羅庚, *A Problem On the Additive Theory of Number of Several Variables*, *Mthematische Zeitschriet*, 41(1936), 708－712.

〔31〕 華羅庚, *On Waring's Problem*, *Tohoku Math. Journal*, 42(1936), 210－225.

〔32〕 華羅庚, *An Easier Waring-Kamke Problem*, *Journal of the London Math. Soc.*, 11 (1936), 4－5.

〔33〕 華羅庚, *A Problem in the Additive Theory of Numbers of Several Variables*, 同上, 12 (1937), 257－261.

〔34〕 華羅庚, *A Generalization of An Easier Waring-Kamke Problem*, 同上, 12(1937), 262－264.

〔35〕 華羅庚, *On A Generalized Waring Problem*, *Proc. London Math. Soc.* (2)43(1937), 161－182.

〔36〕 華羅庚, *On the Representation of Integers As the Sums of the k-th Powers of Primes. Dokl. Akad. Nauk SSSR*(N.S.) 17 (1937), 167－168.

〔37〕 華羅庚, *Some Results in the Additive Prime-Number Theory*, *Quart. Journal Math. Oxford Ser.* 9(1938), 68－80.

〔38〕 華羅庚, *On Waring's Problem*, 同上, 9(1938), 199－202.

〔39〕 華羅庚, *On An Exponential Sum*, *Journal of the London Math. Soc.* 13(1938), 54－61; 又見 *Journal of the Chinese Math. Soc.* 2(1940), 301－312.

〔40〕 華羅庚, *On the Reperesentation of Numbers As the Sums of the Powers of Primes*, *Mathematische Zeitschriet*, 44(1938), 335－346.

〔41〕 華羅庚, *On Waring's Problem for Fifth Powers*, *Proc. London Math. Soc.* (2)45 (1939), 144－160.

〔42〕 華羅庚, *On A Generalized Waring Problem*, Ⅱ, *Journal of the Chinese Math. Soc.*, 2 (1940), 175－191.

〔43〕 華羅庚，*On Waring's Problem With Cubic Polynomial Summands*，*Journal of the Indian Math. Soc.* 4(1940)，127－135；又見 *Sci. Repts. Tsing Hua Univ. A*,(1940)，55－63.

〔44〕 華羅庚，*On A Theorem Due to Vinogradow*，*Quart. Journal Math. Oxford Ser.* 11(1940)，161－176.

〔45〕 華羅庚，*On An Exponential Sum*，*Journal of the Chinese Math. Soc.* 2(1940)，301－312.

〔46〕 華羅庚，*Some Results on Additive Theory of Numbers*，*Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 33(1947)，136－137.

〔47〕 華羅庚，*An Improvement of Vinogradov's Mean-Value Theorem and Several Applications*，*Quart. Jaurnal Math*，20(1949)，48－61).

〔48〕 華羅庚，"關於指數和"，《科學記錄》新輯，1(1957)，*No.* 1，1－4.

〔49〕 華羅庚，"華林問題的優弧部分"，《科學記錄》新輯，1(1957)，*No.* 3，17－18.

〔50〕 華羅庚，《堆壘素數論》，中國科學院數學研究所專刊，甲種第1號，中國科學院出版，1953。

〔51〕 華羅庚：《指數和的估計及其在數論中的應用》，科學出版社，1963。

〔52〕 華羅庚、吳方："Виноградов 中值定理的一個改進和它的某些應用"，《數學學報》7(1957)，574－589。

〔53〕 *Huston*，*R. E.*，*Asymptotic Generalizations of Waring's Theorem*，*Proc. of London Math. Soc.* 39(1935)，82－115.

〔54〕 *Kamke*，*E.*，*Verallgemeinerungen des Waring-Hilbertschen Satzes*，*Math. Annalen*，83(1921)，85－112.

〔55〕 *Ko，Chao*(柯召)，*Decompositions Into Four Cubes*，*Journal of the London Math. Soc.* 11(1936)，218－219.

〔56〕 *Ko，Chao*，*On A Waring's Problem With Squares of Linear Forms*，*Proc. London Math. Soc.* (2)42(1936)，171－185.

〔57〕 *Ko，Chao*，*On the Representation of A Quadratic Form As A Sum of Squares of Linear Forms*，*Quart. Journal Math*，*Oxford Ser.* 8(1937)，81－98.

〔58〕 *Ko，Chao*，*Note on the Representation of a Quadratic Form As A Sum of Squares of Linear Forms*，同上，9(1937)，32－33.

〔59〕 李紅澤："華林問題中 $G(k)$ 的一些新估值"，《數學學報》，33(1990)，*no.* 1. 135－144。

〔60〕 陸鳴皋："關於完整三角和估計的一點注記"，《數學學報》，27(1984)，817－823。

〔61〕 陸鳴皋："完整三角和的估計"，《中國科學》*A* 輯，1985年第1期，1－16。

〔62〕 *Mordell*，*L. J.*，*On A Sum Analogous to A Gauss's Sum*，*Quart. Journal Math. Oxford Ser.* 3(1932)161－167.

〔63〕 *Mordell*，*L. J.*，*On the Four Integer Cubes Problem*，*Journal of the London Math. Soc.*，11(1936)，208－218.

〔64〕 *Niven*，*I.*，*An Unsolved Case of the Waring Problem*，*American Journal Math.* 66

(1944)，136－143.

〔65〕 *Pillai*，*S. S.*，*On Waring's Problem* $g(6)=73$，*Proc. Indian Acad. Sci.*，12A(1940)，30－40.

〔66〕 *Qi Minggao and Ding Ping*（戚鳴皋，丁平），*Estimate of Complete Trigonometric Sums*，《科學通報》，29(1984)，1567－1569，以及《數學學報》B6(1985)，116－120.

〔67〕 *Vaughan*，*R. C.*，*The Hardy-Littlewood Method*，*Cambridge Univ. Press*，*London*，1981.

〔68〕 *Vaughan*，*R. C.*，*On Waring's Problem for Cubes*，*Journal für die reine und angewandte Mathematik*，365(1986)，122－170.

〔69〕 *Vinogradov*，*I. M.*，*Sur le théorème de Waring*，*C. R. Acad. Sci. URSS*，7(1928)，393－400.

〔70〕 *Vinogradov*，*I. M.*，*A New Method in Analytic Number Theory*，*Trav. Inst. Steklov*，10(1937)，1－122.

〔71〕 *Vinogradov* 著，越民義譯：《數論中的三角和方法》，《數學進展》，1：1(1955)，1－101。

〔72〕 王元："華羅庚"，《世界著名科學家傳記·數學家Ⅰ》(吳文俊主編)，科學出版社，1990，63－94。

〔73〕 *Waring*，*Meditationes Algebraicae*，*Cambridge*，1770，204－205；第三版 1782，349－350.

〔74〕 *Wright*，*E. M.*，*An Easier Waring's Problem*，*Journal London Math. Soc.* 9(1934)，267－272.

〔75〕 *Wright*，*E. M.*，*Proportionality Conditions in Waring's Problem*，*Math. Zeit.*，38(1934)，730－746.

〔76〕 *Wright*，*E. M. The "Eesier" Waring's Problem*，*Quart. Journal Math.* (*Oxford*) 10(1938)，190－209.

〔77〕 *Yang*，*K. C.*（楊克純），*All Positive Integers Are Sums of 9 Pyramidal Numbers* $(x^3-x)/6$，*Bull. Amer. Math. Soc.* 34(1928)，412.

〔78〕 越民義："譯者贅言"，參看〔71〕。

〔79〕 張明堯："維諾格拉朵夫"，同〔72〕，190－209。

三次方程求根公式的歷史

王青建
(遼寧師範大學數學史研究室)

16世紀三次方程求根公式的發現是代數學史上的重要事件,它打破了方程求解長期徘徊不前的局面,由此引發出近代方程論的研究。然而這段歷史卻是有爭議的,一般數學史專著未見詳載。本文系統闡述這一公式發現經過。

1494年意大利數學家帕喬利(L. Pacioli,約1445－1517)在威尼斯出版了他的名著《算術、幾何、比與比例集成》(Sūma de Arithmetioa Geometia Proportioni et Proportionalita),書中有包括方程論在內的當時所知的數學知識,書末列舉了幾種他認爲像化圓爲方問題一樣難以求解的方程,例如 $x^3+px=q$, $x^3+q=px$, $x^4+px^2=q$(p、q 爲正數)等,但時隔不久,其中的一類三次方程就由波倫亞(Bologna)的數學家費羅(S. Ferro, 1465－1526)解決了。

費羅早年就學於波倫亞大學,自1496年起一直在該校任教,是當時五位聯合主持講座人之一,教授算術和幾何學。他在1505年或1515年得到一類缺少二次項的三次方程 $x^3+px=q$(p、q 爲正數)的解法,但受當時保密風氣的影響沒有發表出來,只是傳給了他的學生菲奧爾(A. M. Fior,威尼斯人)和納韋(A. dalla Nave, 約1500－1558)。納韋後來成爲他的女婿,1526年起接任了他的教學職位,并寫過一份闡述費羅方法的手稿,還保存過他的一些遺著,但後來都失傳了。人們根據現有的材料推斷,費羅實際上已解決了 $x^3+px=q$ 和 $x^3=px+q$(p、q 爲正數)兩類三次方程。

1530年,布雷西亞的一位教師科伊向數學家塔爾塔利亞(N. Tartaglia,1499－1557)提了兩個問題:1. 求一個數,它的立方加上它的平方的3倍等於5;2. 求三個數,第二個數比第一個數多2,第三個數,比第二個數多2,三個數的積爲1000。它們分別導致三次方程 $x^3+3x^2=5$ 和 $x^3+6x^2+8x=1000$。科伊說他向當地所有的數學家請教,都沒能解決。塔爾塔利亞經過研究後找到了第一個方程的解法,並承認第二個方程的解法暫時沒找到。這件事傳到了菲奧爾那裡,他不相信塔爾塔利亞會解三次方程,自恃掌握費羅的秘傳,便向塔爾塔利亞提出挑戰,要求進行公開競賽。

16世紀意大利的學術界盛行這種公開競賽或公開辯論,它由雙方約定好競賽的內容、方式、地點、評判人以及雙方所出的賭金數目,勝利者除了贏得賭金外,還可名揚天下,會受到各處的講學邀請;而失敗者則名譽掃地,有的還會因此失去原有的教學職位。塔爾塔利亞童年曾遭災難,落下口吃病根,後來刻苦自學成才,當上數學教師。他接到菲奧爾的挑戰後,了解到菲奧爾只是個算術學家,而自己已會解 $x^3+px^2=q$(缺少一次項)一類的代數方程問題,沒多想便應戰了。雙方定於1535年2月22日在威尼斯進行公開競賽。但是不久塔爾塔利亞又得知,曾有一位數學大師(即費羅)30年前就傳授給菲奧爾 $x^3+px=q$(缺少二次項)一類方程的解法,

便着急起來，重新開始鑽研。終於在競賽前 8 天(一說前 10 天)找到了這類方程的解法，第二天又找到了 $x^3=px+q$(p、q 爲正數)一類方程的解。2 月 22 日競賽時雙方各自向對方提出 30 個問題。菲奥爾提的所有問題都導致 $x^3+px=q$(缺少二次項)形式的方程，塔爾塔利亞在兩個小時内全部解了出來。而塔爾塔利亞的問題多數導致 $x^3+px=q$(缺少一次項)形式的方程，其餘的導致 $p^2x^2=x^3+q$, $x^3+px=q$, $x^3=px+q$ 等類型，菲奥爾一個也沒解出來。塔爾塔利亞大獲全勝，他放棄了規定的賭金，只領受了勝利者的稱號，光榮凱旋。

這次競賽的消息通過科伊傳到了米蘭數學家卡爾達諾(G. Cardano, 1501－1576)那裏。此人職業爲醫生，業餘研究數學，在算術、代數、概率及力學等方面都做出過貢獻，還在米蘭開設過幾何學課程。當時他正在爲編寫一本數學書搜集材料，聽到這次競賽的消息後非常高興，於 1539 年 1 月 2 日委托一位圖書經銷員巴薩諾找到塔爾塔利亞，要求傳授三次方程的解法，並說如果他願意，可以用塔爾塔利亞的名字將這一方法編入卡爾達諾的著作中。他拒絕了這一要求，説他本人將寫一部專著闡述該法。巴薩諾又請求他將菲奥爾與他競賽時出的 30 個問題及答案寫出，他也拒絕了，並說卡爾達諾會從答案中推出解法的。最後他只給出了這 30 個問題，而沒有附任何答案。

卡爾達諾對塔爾塔利亞的態度很惱火，於是在 1539 年 2 月 12 日寫信譴責了他，又提出兩個試探性的問題，要求他解答。塔爾塔利亞 2 月 18 日給出第一個問題的完美解答，而對第二個涉及三次方程的問題避而不答，以防泄露其解法。卡爾達諾鑒於此情，改變了策略，在 3 月 13 日的信中開始大力恭維他，並解釋以前說的過頭話是聽了科伊的讒言，在此表示道歉。最後邀請他到米蘭做客，說有一位名流富豪瓦斯托想要見他。

1539 年 3 月 22 日塔爾塔利亞隻身來到米蘭。卡爾達諾說瓦斯托有事暫時離開，將他挽留於家中，三天後開始懇求他傳授三次方程的解法，他回答說他正在翻譯歐幾里得著作，沒有時間將自己的結果整理出來。而他的發現是解決所有其他三次方程的關鍵，一旦泄露出去，別人會搶先發表，這是他保密的理由。卡爾達諾發誓不泄密，又以上帝和自己的名譽擔保，甚至說他會用密碼將這個解法記下來，使後人即使發現了它也無法理解。塔爾塔利亞經不住反復懇求，終於將 $x^3+px=q$ 和 $x^3+q=px$(缺少二次項)類的三次方程解法以一首 25 行詩歌的形式相告。後來他還就詩中難點作過提示，兩人通過幾封信。1541 年他又找到幾類三次方程的解法，但沒有告訴別人。

卡爾達諾詳細研究了該解法，用幾何方法證明其正確性，並據此找到了其他類型三次方程的解法及證明，還提出三次方程不可約情形。同時他得知了菲奥爾與費羅在這個問題上已有的成果，因此在 1540 年 1 月 5 日給塔爾塔利亞的信中說：科伊回到了米蘭，他在威尼斯時與菲奥爾討論過 $x^3+px=q$ 和 $x^3=px+q$(p、q 爲正數)類型的方程，并得到了幾種解，用以暗示三次方程的解法并非塔爾塔利亞獨有。但此時那人仍忙於翻譯，沒有領會到這層意思，也未回信。1544 年卡爾達諾與他的學生費拉里(L. Ferrari, 1522－1565)一起到波倫亞拜訪費羅的女婿和繼承人納韋，讀了費羅的手稿，確信稿中已有 $x^3+px=q$(p、q 爲正數)的解。他可能覺得沒有繼續保密的必要，就在 1545 年出版的著作《大術，或論代數法則》Artis magnae, sive de regulis algebraicis liber unus，紐倫堡，[簡稱《大術》(Arsmagna)]中將三次方程的解法全部發表。不過他對公式來源做了説明(第 11 章)："大約 30 年前波倫亞的費羅發明了本章陳述的方法，并將它告知威尼斯的菲奥爾。當布雷西亞的塔爾塔利亞宣告也發明了這一方法時菲奥爾與他進行

了競賽。塔爾塔利亞在我們的懇求下告訴了我們這種方法，不過隱瞞了證明。現陳述如下。"雖然如此，卡爾達諾的失信行爲仍然激怒了塔爾塔利亞，由此展開了一場激烈的論戰。

1546 年，塔爾塔利亞在威尼斯發表《各種問題與發明》(Quesiti et inventioni diverse)，在第 9 卷中用對話和書信陳述了他與科伊、菲奧爾、卡爾達諾等人的交往，他發現三次方程解法的過程，在問題 34 中全文記載了那 25 行詩，并斥責了卡爾達諾的背信行爲。此書沒有引起卡爾達諾的任何反響，而費拉里卻代之而起，與塔爾塔利亞開始了近兩年的論爭。

費拉里早年在卡爾達諾家當僕人，後來成爲他的學生和秘書，1540 年接替他在米蘭開設數學公開講座。他倆一起研究過三次方程，還第一次找到了四次方程的代數解法，見《大術》。1547 年 2 月 10 日，費拉里在威尼斯發表了一封致塔爾塔利亞的公開信，其中除了批評他對卡爾達諾的偏見外，還指摘他的書中就有抄襲的部分。信末鄭重提出挑戰，要求進行爲期 30 天、賭金 200 個銀幣的公開競賽。信後附有 50 個數學家的名單，費拉里聲稱已將這份挑戰書分給了他們每個人。

9 天後，塔爾塔利亞以同樣方式發表了公開答復信，并聲稱在意大利此信分發了 1000 份。他在信中申明不與費拉里爭辯，要求卡爾達諾出面，或者兩人一起作爲一方，這樣他纔接受挑戰。

4 月 1 日費拉里寫來第二封信，提到拜訪納韋的事，說三次方程的解法早已有之，并非塔爾塔利亞的專利。

4 月 21 日塔爾塔利亞在第二封回信中仍重申要卡爾達諾本人出面。他因口吃不願進行公開辯論，提出雙方應各自列出競賽題，在指定時間内解答。他還强調應有一位好的仲裁人。此外，對費拉里指摘他抄襲予以反駁，說他首次證明了别人提出的一個命題并非抄襲。最後他向費拉里提出了 31 個問題，并限期 15 天内解出。

6 月 1 日，費拉里在第三封信中也提出了 31 個問題，但沒有回答對方的問題，信中指摘他的信除了漫罵之外一無所有，還說他不敢公開競賽。

7 月 19 日塔爾塔利亞在第三封回信中解出費拉里的全部問題，并宣稱在競賽中獲勝。他在後來的回憶中(1556)寫道：我收到費拉里問題的當天就解出了其中的 10 個問題，第二天更多，第三天全部解出，沒有超過我規定的 15 天，而且很快就將它們印好寄到米蘭。

雖然費拉里在 7 月底的第四封信中宣告已解決了對方的問題，但直到 10 月才在第五封信中寫出解答；同時他對塔爾塔利亞的解答大加貶斥，說只有 5 個是對的，其餘都錯了。

塔爾塔利亞的第五封回信在 1548 年 6 月 1 日發出。信中他突然改變了原來的決定，接受了挑戰，同意到米蘭進行公開辯論。他後來(1556)寫道，費拉里的解答比原定期限晚了許多，而且大部分算錯了，他要求公開承認其錯誤。

在 7 月 14 日第六封來信和 24 日回信中雙方商討了必要的競賽事務安排，其中不乏相互敵視之辭。

這年 8 月 10 日上午 10 時，公開競賽在米蘭大教堂附近舉行，由米蘭執政官費蘭特(Ferrante)任評判人。塔爾塔利亞只有一個兄弟陪同，費拉里則由一大群米蘭的朋友助威。可惜當時的情形沒有正式記載。塔爾塔利亞 8 年後(1556)回憶道：塔爾塔利亞首先解釋來到米蘭的原因，然後闡述所要討論的學科内容，當他開始批駁費拉里解答的錯誤時，被吵鬧的人群打斷了兩個小時，後來接着申述，要求費拉里公開承認錯誤，發言又被打斷。費拉里在發言中隻字不提

自己的錯誤，而是强調對方有一個不能解決的問題。就這樣，爭論一直持續到晚飯時間，觀衆散去，結果不了了之。塔爾塔利亞認爲聽衆和裁判不公，擔心發生暴力，没有參加第二天的辯論，返回布雷西亞，費拉里被認爲是勝利者。

上述情況説法不一，細節多有出入。現存文獻有《大術》(1545)、《各種問題和發明》(1546)和《論數學與度量》(General trattato di numeri et misure，1556—1560)，以及兩人間的12封通信，使這段歷史成爲數學史上的"懸案"，只當作軼聞流傳。目前較爲一致的結論是：費羅第一個發現 $x^3+px=q$（p、q 爲正數）一類三次方程的解法；塔爾塔利亞再次發現了這種解法以及其它幾類三次方程的解法；卡爾達諾得到第一類三次方程解法的幾何證明，并給出任意三次方程的一般解法及其證明。不過費羅關於三次方程的解法没有任何文字材料流傳下來，而卡爾達諾的《大術》卻是第一個發表這一解法的著作。由於《大術》的影響，三次方程求根公式現在冠以"卡爾達諾公式"或"卡當公式"流傳（卡當是卡爾達諾英文拼法 Cardan 的音譯）。據載，塔爾塔利亞因爲競賽敗北一度失去講學職位，晚年孤寂而逝。而費拉里卻因競賽獲勝而平步青雲，受到包括神聖羅馬帝國皇帝查爾斯五世等名流賞識，後任教會要職和主持大學講座，成爲當時最大的受益者。

關於方程 $x^3+px=q$（p、q 爲正數）的解法《大術》中是以具體例子 $x^3+6x=20$ 的解表述的，實質是引入兩個新的變量 u、v。用現代符號表示就是設 $u^3-v^3=q$，$(uv)^3=(\frac{1}{3}p)^3$ 由此可推出 $u^3=\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}$，$V^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}$，再由 $x=u-v$ 即可求得原方程的解 $x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}$。卡爾達諾本人用幾何方法證明了 $x=u-v$ 成立。至於塔爾塔利亞的證法已無從考證。費羅的求解方法據費拉里説與塔爾塔利亞的類似，但也有人持另一説：瓦卡(G. Vacca)1930年發表文章推測了一種更簡潔的方法，説費羅有可能受到二次根式和式的啓發。例如由 $x=\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}$ 可推出 $x^2=(2\sqrt{a^2-b})+2a$，如果是三次根式 $x=\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}$ 則有 $x^3=(3\sqrt[3]{a^2-b})x=2a$，設 $p=3\sqrt[3]{a^2-b}$，$q=2a$，就有 $x^3=px+q$ 和 $x^3=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2-(\frac{p}{3})^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2-(\frac{p}{3})^3}}$。同理如果考慮三次根式 $x=\sqrt[3]{\sqrt{b}+a}-\sqrt[3]{\sqrt{b}-a}$ 則 $x^3=-(3\sqrt[3]{b-a^2})x+2a$，令 $p=3\sqrt[3]{b-a^2}$，$q=2a$ 則有 $x^3+px=q$ 和 $x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2-(\frac{p}{3})^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2-(\frac{p}{3})^3}}$。至於究竟如何，也無從考證。三次方程求根公式由韋達(F. Viete，1540—1603)等人加以改進，并在理論上系統化。而卡爾達諾三次方程求解方法的完整論述是由歐拉在近兩個世紀後的1732年作出的。

《竪亥錄》中的圓型平面圖形問題

徐澤林

（內蒙古師範大學科學史研究所）

引　言

《竪亥錄》是日本數學史古典時期較早的一部數學著作，成書於德川初期的寬永十六年(1639)，作者今村知商，名仁兵衛，其傳記材料史書不見。除《竪亥錄》外，還著有《因歸算歌》(1640)、《日月會合算法》(1641)。

日本數學有兩次受到中國傳統數學的影響，一次是古代以《算經十書》爲代表的古典數學的傳播，一次是明清時期大批數學著作的流入。室町以來的日中、日朝交往，使中國各種書籍紛紛傳入日本。德川時期，以生產力迅速發展爲背景，町人勢力迅猛興起，町人自己也開始了文化創造，有許多人來專門從事學術研究，出現了熱心研究明代科學技術的熱潮，在醫學、農業技術、天文學、數學、土木工程學等各個領域都有獨特的發展[1]。在數學方面，朱世傑的《四元玉鑑》、《算學啓蒙》，程大位的《算法統宗》、《算法纂要》、徐心魯的《盤珠算法》等爲代表的大批元明數學著作已傳到日本，對日本數學有很大的影響。德川時期是日本數學史上的黃金時代，奠定了"和算"基礎，日本數學史稱這一時期的數學爲"古流四算法"。由於受明代數學的影響，同時也由於當時日本社會的數學需要，這些古典時期的數學著作都是以明代應用數學爲基礎，尤其受《算學啓蒙》與《算法統宗》影響極大，它們的內容和體例與明代數學著作基本一致，但也有其獨特的地方。《竪亥錄》是其中的一部，與其它著作相比，更具有獨特的風貌，全書用漢語撰寫(加假名)，語言風格與中國算書一致，雖然其內容與編排仿照中國算書，但不象中國算書以具體的實際問題的求解來介紹算法，全書未舉一例題，實際是各種算法——"術"的匯集，特別是對有些問題的研究，沒有沿襲中算傳統，給出新的方法，反映一面學習中國傳統數學，一面也有

[illegible]

一 圓 形

象《算法統宗》一様,《竪亥錄》將圓稱之爲"平圓"。主要是圓直徑、周長、面積的互求問題,分四類,共七個公式。

1、"今有平圓之徑周,知步式者"[2]。已知直徑和周長求面積。

方法是"相因四歸","以徑之尺數與周之尺數,相因乘而得步數,四歸之則得步數,是寸步也"。記直徑 D,周長 C,面積 S,則

$$S = D \cdot C/4 \qquad (1)$$

這是中國傳統的圓面積計算公式,《算法統宗》與《算學啓蒙》中均有,《竪亥錄》第一次襲用了這一準確公式,在它之前的數學著作中沒有這一圓面積公式。

2."今有平圓之徑(周),知周(徑)式者"。已知直徑(或周長)求周長(或直徑)。

公式前列出圓周率 $\pi=3.162$ 與圓積率 $\pi/4=0.7905$,$\pi/40=0.07905$。。

上述問題的求法是"置徑(周)之尺數,周圓之徑、知周之周法(三一六二,即 π),即得尺數,是周(徑)也"。即

$$C = 3.162D \qquad (2) \qquad D = C/3.162 \qquad (3)$$

和(1)一樣,(2)、(3)也是中國古老的公式。

3."今有平圓之徑(周),知步式者"。已知直徑(或周長),求面積。

方法是"以徑(周)之尺數自乘而得步數,於是用圓之徑(周)之自因之步法(七九零五、七九零五)($\pi/4$ 與 $\pi/40$)因乘,則得步數,是寸步也"。依術語

$$S = 0.7905D^2 \qquad (4) \qquad S = 0.07905C^2 \qquad (5)$$

《算學啓蒙》與《算法統宗》中都有這兩公式,不同的是圓周率和圓積率的取值不同。中國古代圓周率有好幾種,歷代各率并用,精粗不一。明代理論數學衰退,民間應用數學興起,對圓周率的近似程度要求更是不高,普遍採用 $\pi=3$ 的古率,程氏《算法統宗》雖然於卷三錄用了顧應祥《測圓算法》中的"方圓論說"[3],討論了圓周率精粗問題,但計算還是以 $\pi=3$ 入算。《算學啓蒙》與《算法統宗》對於公式(4)、(5)表述爲"徑自乘,三之,四而一"[4](或"徑自乘,以七五因之"[5]以及"周自乘,以十二而一"[6],即

$$S = (3/4)D^2 \qquad (4') \qquad S = (1/12)C^2 \qquad (5')$$

《竪亥錄》沒有采用中國此時的 $\pi=3$,而取 $\pi=3.162$。它是由於受當時日本數學研究的影響,如《割算書》(1622)取 $\pi/4=0.79$ 或 0.8;《諸勘分物》(1622)取 $\pi/4=0.8$,《塵劫記》(1622)取 $\pi/4=0.79$ 或 0.8,π 普遍取 3.16[7]。因今村知商取 $\pi=3.162$,故而圓積率爲 0.7905,實際上是對前面 $\pi=3.16$ 的改進而更近於 $\sqrt{10}$。毫無疑問,今村知商取 $\pi=\sqrt{10}$,這從(4)、(5)兩式中也能推出。取 $\pi=\sqrt{10}$,古代張衡、秦九韶用過,元、明數學著作中不見,張、秦的作法是否流傳日本,尚無史料證明。西方傳教士此時已進入日本,是否受到他們的影響,也不清楚。有可能是日本數學家自己的研究成果。這批數學著作不象中國算書有注釋與細草,象《竪亥錄》沒有例題,很難弄明 $\pi=\sqrt{10}$ 的根據。

4."今有步數,知平圓之徑(周)式者"。已知圓面積求直徑(或周長)。

方法是"置步數,用圓之徑(周)自因之步法(七九零五、七九零五)歸除而得步數爲實,用開

平之式,則得尺數是徑(周)也"。這是第3類問題公式(4)、(5)的逆問題。

$D=\sqrt{S/0.7905}$ (6) $C=\sqrt{S/0.07905}$ (7)

二 弓 形

弓形計算,從《九章算術》開始,一直作爲"弧田"的數學模型,是土地丈量與數學研究的一個重要課題,歷代算書中均有,它是與圓緊密聯系在一起的,西方解析方法未傳入之前,都是采用《九章算術》系統的近似計算,這些公式後來收集於顧應祥的著作中,《算法統宗》也收錄了不少。《豎亥錄》在介紹圓的計算之後,便介紹了名之爲"平圓之闕"或"徑矢弦"的弓形計算,這也是該書最具特色的部分,共有六個公式。

1."知徑矢弦之徑式者"。已知弦長、矢長求弧的直徑。

方法是:"以弦之尺數自因乘而得步數,於是用矢之尺數四因之而得尺數,歸除而得尺數,於是加矢之尺數,俱是得尺數,是圓徑也"。

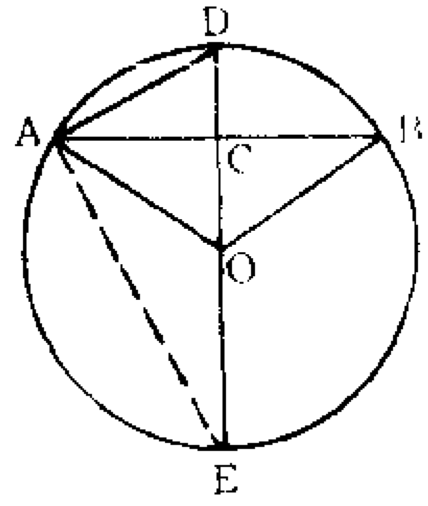
如圖一,記弦AB=l、矢CD=h、弧ADB=p,直徑DE=d,則

$$d=l^2/4h+h \tag{8}$$

這是一個較準確的計算公式,最早出現在楊輝的著作中,朱世杰、程大位將其表述爲"弦長折半自乘以矢除之加矢",即

$$d=(l/2)^2\div h+h \tag{8'}$$

(8)、(8′)本質一致,包含射影定理的結論[8]。事實上,連結AD、AE,根據勾股術,易明Rt△ACD與Rt△ECA間的"不失本率"關係,有$(l/2):h=EC:(l/2)$,即$EC=(l/2)^2\div h$,於是得(8)或(8′)。



圖一

《豎亥錄》繼承了這一準確公式。

2."知徑矢弦之弦式者"。已知直徑與矢求弦長。

方法是"圓徑之尺數內減去矢之尺數而止餘之尺數,於是用矢之尺數四因之而得尺數,因乘而得步數爲實,用開平之式,則得尺數,是弦也。"即

$$l=\sqrt{(d-h)\cdot 4h} \tag{9}$$

這是與(8)互逆的公式。

3."知徑矢弦之矢式者"。已知直徑與弦求矢。

方法是:"以圓徑之尺數自因乘而得步數,內減去弦之尺數,自因乘而得步數而止餘之步數爲實,用開平方之式而得尺數,又圓徑之尺數內減去開平方商之尺數而止餘之尺數,半之則得尺數,是矢也"。即

$$h=(d-\sqrt{d^2-l^2})/2 \tag{10}$$

這也是從楊輝的公式變化而來的準確公式,《田畝比類乘除捷法》與《算法統宗》表爲

$$h=d/2-\sqrt{(d/2)^2-(l/2)^2} \tag{10'}$$

都是由勾股定理導出。

公式(8)、(9)、(10)都來自《算法統宗》[9]。

4."知弧矢弦之弧式者"。已知直徑與矢求弧長。

方法是:"用徑矢弦之徑式,知圓徑,而圓徑之尺數,於是加矢弦之尺數,半之而得尺數,俱是得尺數,於是用矢之尺數四因之而得尺數,因乘而得步數爲實,用開平之式則得尺數,是弧也"。記弧長爲 p,則

$$p = \sqrt{(d + h/2) \cdot 4h} \tag{11}$$

這是求弧長的近似公式,與中國傳統的弧長公式完全不同。沈括第一次給出弧長的近似公式爲

$$p = l + 2h^2/d \tag{11'}$$

王恂、朱世杰、周述學等進一步研究,得到了弓形的若干公式,顧應祥概括爲弧矢十三式,形成一個"沈括弧矢系統"。這些成果在《算法統宗》中也有所反映[10]。可是《堅亥錄》没有沿襲中國傳統方法,另辟蹊逕,創立了新的弧長公式。下面我們將公式(11)與(11')作一比較。

設⊙O 爲單位圓,弧長 AB=p,則其弧度及圓心角∠AOB=p,如圖一,弦 AB=2BC=2sin(p/2)、矢 CD=1−cos(p/2)。

由公式(11')得弧長

$$p_0 = AB + CD^2 = 2sin(p/2) + (1 - cos(p/2))^2$$

由公式[11]得弧長

$$\begin{aligned} P_1 &= \sqrt{(d + CD/2) \cdot 4CD} \\ &= \sqrt{[2 + (1 - cos(p/2))/2] \cdot 4 \cdot [1 - cos(p/2)]/2} \\ &= \sqrt{[5 - cos(p/2)] \cdot [1 - cos(p/2)]} \end{aligned}$$

在 $\pi=3.1415926\cdots$,$\pi=3$,$\pi=\sqrt{10}$下,弧 AB 長分别記爲 p, p_1, p_2。

當 $\pi=3$,對於(11'),p_0 與 p_1 的絕對誤差 $M_1=p_1-p_0$,相對誤差 $K_1=M_1/p_1 \cdot 100\%$;

當 $\pi=\sqrt{10}$,對(11),p_1 與 p_2 的絕對誤差 $M_2=p_2-p_1$,相對誤差 $K_2=M_2/p_2 \cdot 100\%$;

當 $\pi=3.1415926\cdots$,由(11')、(11)得出的 p_0、p_1 與真值 p 的絕對誤差分别爲 $N_1=p-p_0$、$N_2=p-p_1$,相對誤差爲 $T_1=N_1/p \cdot 100\%$,$T_2=N_2/p \cdot 100\%$。

下面我們考察當 AB 漸小時,上述各誤差的變化規律。

令圓心角∠AOB 在(0,π)上變化,取

$$\angle AOB = \theta = 3.1415926\cdots/I, \quad (I = 1,2,3,\cdots \text{下同})$$

相應地

$$\theta_1 = 3/I, \theta_2 = \sqrt{10}/I,$$

於是得到一系列對應值。分析這些值可以看出:

①I=1 時,即半圓情況下,p_0、p_1 分别相對於 $\pi=3$、$\pi=\sqrt{10}$是準確值。②隨着 I 的增大,即隨 AB 的減小,p_0 與 p_1 的絕對誤差 M_1 及相對誤差 K_1 都越來越小,P_1 與 P_2 亦然;③$|M_2|<|M_1|$,且$|K_2|<|K_1|$;④p_0、p_1 相對於真值 p 的誤差總存在$|N_2|<|N_1|$,$|T_2|<|T_1|$。

經分析比較,得如下結論:①(11')與(11)分别屬於 $\pi=3$ 與 $\pi=\sqrt{10}$系統,半圓是它們的起點,其立術分别根據 $\pi=3$ 與 $\pi=\sqrt{10}$;②在相應的系統内,都是很好的近似公式,但(11)比

(11′)的近似效果更好;③相對於弧長準確值,(11)比(11′)的近似程度高。因爲$\sqrt{10}$比3近於π真值。

下面再根據上述結論,粗略探討(11′)與(11)的造術問題。

(11′)的造術,有人認爲是從《九章》弓形面積公式 $A=(l+h)h/2$ 導出[11]。這未必成立,因爲這樣推導必然以扇形面積公式 $Q=l\cdot r/2$ 以及嚴密的演繹爲基礎,而古代一直沒有扇形面積公式,同時沈括也沒有導出精確的扇形公式。筆者認爲,沈括是從計算弧長出發的,他注意到了弧比弦長,之間存在一"弦背差"[12],故只需在弦長 l 上加一修正值便得到弧長 p。"古法惟以中破圓法拆之,其失有及三倍者"[12]。就是說直徑分圓内六觚之形時,所得半圓内三觚面與半周之誤差,必是三觚面上小弓形的弧弦之差。由此出發先考察半圓(劉徽注《九章》弧田術即如此),如圖二,弦 $l=d$,矢 $h=r$,若以 $\pi=3$ 入算,此時弧即半周爲 $p=3r$,即 $p=d+r$,便是 $p=l+h$,考慮到弧弦差因弧之大小(或矢徑比例)而變,便用 $p=l+f(h,d)h$,對於修正係數 $f(h,d)$,當然用 h 與 d 的比例,再考慮半圓下 $p=l+h$,當取 $f(h,d)=2h/d$,於是得(11′)。對於(11),根據圖一化簡,

$$p=\sqrt{(d+h/2)4h}=\sqrt{4hd+2h^2}$$

$$\because hd=AD^2,\quad AD^2=(l/2)^2+h^2,$$

$$\therefore p=\sqrt{4AD^2+2h^2}=\sqrt{l^2+6h^2} \qquad (\text{XI})$$

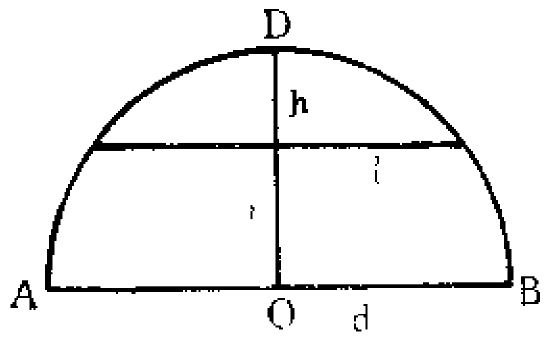


圖 一

類似於上述(11)的立術分析,今村知商從 $\pi=\sqrt{10}$ 出發,也以半圓爲起點,通過修正弧弦差來立術。

∵半周弧 $p=\pi r=\sqrt{10r^2}$,而 $p>l$,即 $p=l+\lambda$,(λ爲修正值),由半周 $p=\sqrt{10r^2}$ 得到啓示,應當 $p=\sqrt{l^2+\xi}$(ξ也爲修正值),在半圓時 $l=2r,h=r$,∴ $p=\sqrt{10r^2}=\sqrt{4r^2+6r^2}=\sqrt{l^2+6h^2}$,將此式推廣到一般弓形便得到(XI),也便得到公式(11)。

這種造術設想的合理性爲:①今村知商對於弓形面積公式與弧長公式的處理,是將弧長公式在先,作爲弓形面積公式的基礎,在後面給出的弓形面積公式是

$$A=2d/4-(d/2-h)l/2 \qquad (12)$$

顯然是以扇形面積減去三角形面積而得,而扇形面積由弧長求出。同時(11)與(12)的關係,并不象《九章》弓形面積公式與(11′)滿足朱世杰關係式

$$-5b^4+4db^3+4Ab^2-(2A)^{22}=0^{[14]}$$

可以認爲(11)并非由弓形面積推出。②《竪亥録》稍後不久的著作中的相應公式可作爲旁證。《算法闕疑抄》(1660)中 $p=\sqrt{l^2+(\pi^2-4)h^2}$,《算俎》(1663)中有 $p=\sqrt{l^2+5.8609h^2}$[15],它們由(11)演變而來,只是在數值上作些修改,以改進其近似度。

從上述分析不難看出,在弓形面積與弧長問題的處理上,《竪亥録》没有因襲中國傳統方法,有自己的獨立研究,得出的公式比沈括的公式要先進一些。

5."知弧矢弦之弦式者。"已知弧長與矢長求弦長。

方法是:"以弧之尺數自因乘而得步數,於是用矢之尺數四因之而得尺數,歸除而得尺數,内減法矢之尺數,半之而得尺數而止餘之尺數,(是圓徑也。)知圓徑而用知徑矢弦之弦式,則得尺數,是弦也。"此爲公式(11)的逆用。先由(11)得 $d=p^2/4h-h/2$,再用(9)得弦長。

6."今有圓闕之弧矢弦,知步式者。"已知弧、矢、弦長,求弓形面積。

術曰："用徑矢弦之徑式，知圓徑，而圓徑之尺數與弧之尺數，相因乘而得步數，四歸之而得步數。又圓徑之尺數，半之而得步數，內減去矢之尺數，而止餘之尺數，與弦之尺數相因乘而得步數，半之而得步數。右徑弧相乘四歸之，步數內減去弦，止餘相因半之步數，而止餘之步數，是寸步也。"即

$$A = pd/4 - (d/2 - h)l/2 \tag{12}$$

前一部分是扇形面積，後一部分是等腰三角形面積，這是一較準確公式，與《九章》弧田公式

$$A = (l + h)h/2 \tag{12'}$$

根本不同，和現今的處理方法一樣。在實際計算中，因p是近似計算，因此利用(12)計算也是近似值，故而從計算的角度看，它并不比(12′)先進多少。至於其中的扇形面積公式Q=pd/4即pr/2的表達形式，中國算書中沒有出現，但有曲底三角形的田畝丈量問題，計算方法與此類似，《算法統宗》與《塵劫記》中都有這種曲底三角形圖形的計算，今村知商的扇形公式雖由此而來，但意義比其要深，也可以說，今村知商是給出扇形公式的第一人。

三　圓束與"橢圓"

平圓式中還介紹了層層相圍的圓總數計算問題。在等圓情況下，中心一圓的圓束，各層圓個數均以6遞增，其總數爲

$$N = n(n + 6)/(2 \times 6) + 1 \tag{13}$$

其中n是外周圓之個數。術曰："周之個數，於是加六個，俱是得個數，於是用周之個數因乘而得個數，於是用二六(遍)除而得個數，於是加一個則得數，是個數也。"其實這是公差爲6的等差數列求和問題。來自中國傳統的"圓箭束"，今村知商只考慮圓形情況，沒有收錄方束、三棱束等。相應的立體問題——垛積術置於第八部分"方直式"。

這一部分最後是"飯櫃形"，象橢圓，但不是現今意義下的橢圓。其面積計算方法《豎亥錄》述爲："縱之尺數內減去橫之尺數，而止餘之尺數(是爲縱)，橫之尺數(即爲橫)。用仿知縱橫之步式而得步數，右二數之步數并合則得步數，是寸步也。"如圖三，記長軸爲a，短軸爲b，面積爲B，則，

$$B = (a - b)b + 0.7905b^2 \tag{14}$$

它與橢圓面積$B=\pi ab/4$誤差很大。筆者認爲，今村知商將"飯櫃形"化歸爲一矩形和兩半圓，半圓直徑爲b，則矩形面積爲$(a-b)b$、兩半圓面積爲$0.7905b^2$，并之得(14)。《塵劫記》卷二十三"檢地四事"中有這一圖形的計算，方法與(14)一樣，中國算書中一直沒有，僅《算法統宗》卷三中有"欖形之田"的面積計算。所謂"欖形田"即由兩個弓形合并的曲綫圖形，也類似於橢圓狀，日本的"飯櫃形"當是由此演變而來，并已成爲獨立的數學模形。

參考文獻

〔1〕 依田熹家著，卞立强、李天工譯：《簡明日本通史》，1989，北京大學出版社，第153頁。

〔2〕 與謝野寬編纂，正宗敦夫、與謝野晶子校訂，《日本古典全集·豎亥錄》。以下所引《豎亥

錄》文，均出自此書。
〔3〕 程大位著，梅榮照、李兆華校釋：《算法統宗》，1990，安徽教育出版社，第 264 頁。
〔4〕 朱世傑：《算學啓蒙》，卷中"田畝形段門"，清道光刻本。
〔5〕 同〔3〕，第 233 頁。
〔6〕 同〔3〕。
〔7〕 戸谷清一："江戸時代初期の数学書におけろ円に関すろ定数について"，《數學史研究》，日本數學史學會，1989 年 10—12 月，通卷 87 號，第 4 頁。
〔8〕 孔國平："再論宋元時期的天元術"，《自然科學史研究》，1991 年第 2 期，科學出版社，第 106 頁。
〔9〕 同〔3〕，第 574—584 頁。
〔10〕 李儼：《中算史論叢》第三集，1955，科學出版 社，第 257 頁。
〔11〕 中外數學簡史編寫組：《中國數學簡史》，1986，山東教育出版社，第 268 頁。
〔12〕 同〔3〕，第 577 頁。
〔13〕 沈括：《元刊夢溪筆談》卷十八，1975，文物出版社。
〔14〕 同〔10〕。
〔15〕 加藤平左エ門："圓理"，《和算の研究——行列式及圓理》，1934，東京開成館，第 28 頁、第 37 頁。

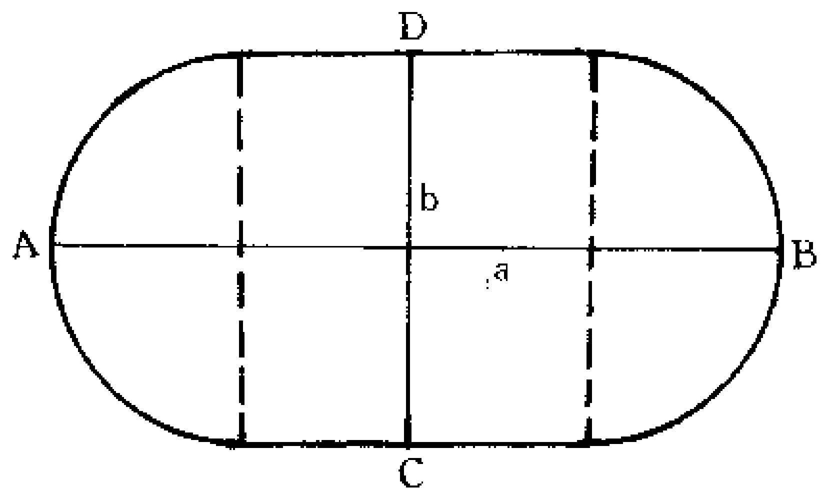


圖 三

日本和算中的遺題承繼與算額奉揭

那日蘇
（内蒙古師範大學科學史研究所）

本文僅對日本傳統數學和算的獨特流傳、發展的方式，及其在學派間的學術競爭，和算發展過程中的作用和影響，做一簡略論述。

自1622年和算書誕生不久，遺題承繼和算額奉揭就逐漸興起，並迅速形成推動和算向前發展的强大動力。同時，以其獨特的形式向民衆宣傳和普及和算。所謂遺題承繼，就是某和算家在自己所著的和算書卷末，提出一些數學難題以示讀者。其弟子、門人或其他讀者在經過努力研究，解決了難題之後，一般要著難題解答之書，並在卷末更加深入地揭示問題，提出難度更高的問題，讓弟子、門人或其他和算家去研究解決，從而進一步將研究引向深入。算額奉揭則是和算家對自己提出的難題做出解答，並將解答附上原題寫在一塊用木板做成的扁額上，此扁額（大多爲長方形，也有根據不同問題而做成正方形的）稱作算額。一般地，算額上都用彩色畫上問題的幾何圖形，以利於理解和計算。通常，和算家們將自己製做的算額挂在神社、佛閣的殿堂或迴廊等人們經常聚集之處，這叫作算額奉揭。算額的下部通常要署上作者姓名，注明奉揭（挂出）的年月日。也有不少注明作者所屬流派及恩師姓名的。

算額奉揭主要是爲了將難題及其解答公之於衆；以問題的解決向公衆及其他流派顯示本流派、恩師及自己的數學實力；對幫助解決問題的神和佛表示感謝之意；祈願今後碰到的其他難題能順利解決；鼓勵自己的弟子、門人更加努力刻苦；對其他和算流派顯示自己在問題解法上的優越性；對神社、佛閣工程竣工、恩師、家族的喜慶事典的祝賀，等等。遺題承繼於十七世紀初，和算書誕生以後就逐漸流行起來，許多著名和算書就是遺題承繼的產物。因遺題承繼起初只是以和算書形式，主要面向弟子、門人及本流派，帶有某種保密性質。但很快就趨於公開化，於是算額奉揭逐漸興盛起來。算額奉揭較遺題承繼稍晚一些興起，於十九世紀初達興盛期。算額奉揭這一形式可説是日本和算所獨有的。據説在歐洲文藝復興時期，教會曾將數學問題寫於羊皮紙上，貼於牆壁公之於衆，以征求問題的解答。但這一形式在歐洲顯然没有普及。

遺題承繼的發端可追溯到著名和算家吉田光由（1578－1672）1641年增訂再版的《新編塵劫記》。吉田光由的《塵劫記》（初版1627年）與其師毛利重能（約1600－約1650）的《割算書》（1622）爲和算書中影響最大的，特别是前者。今村知商（生卒年不詳）也是毛利重能的高徒，與吉田光由爲師兄弟。他於1639年著《竪亥録》一卷，該著作前半部分的直綫圖形是從師毛利重能處所得，而後半部分有關圓的弦弧矢互求術爲其獨立研究之結果。書中列出獨立得出的許多有關弧、弦、矢、圓及球的公式，這也是一本數學公式集。吉田光由受其師兄弟研究成果的驅使，於1641年將其原作《塵劫記》做了增補，以《新編塵劫記》三卷刊行。其中卷爲有關帕斯卡三角形的問題，在圓面積和球體積的計算公式中，爲簡略起見均取與《九章算術》相同的π值3，在

下卷之末載有十二個問題。對此，吉田光由在十二問之後寫道："謹以上述問題奉獻天下數學家，以作爲檢驗自我能力的一種方法和手段"[1]。這就是所謂遺題承繼的起始。其問題分爲：勾股積、圓截積、盈不足算、方臺、圓臺、粟石積等等內容。如，圓截積之第十問："今有直徑爲一百間① 的圓，用兩條平行弦將其分割成面積分别爲二千九百坪②、二千五百坪、二千五百坪三部分，求兩條弦及矢的長度"。其方法爲，設：圓直徑爲 d，弦爲 a，矢爲 h，面積爲 A，則由《九章算術》的公式，有 $A=\frac{1}{2}h(a+h)$，又有徑矢弦公式 $a^2=4h(d-h)$，由上二式消去 a，得關於 h 的四次方式程式

$$5h^4-4dh^3-4Ah^2+4A^2=0$$

將 A 的不同值代入上式，即可得各 h 值，他提出的遺題爲求解上述四次方程。爲簡化計算，各值取近似整數。

榎並和澄著三卷本《參兩錄》(初版 1653 年)，下卷中對上述《新編塵劫記》的十二遺題做了解答。同時提出八道遺題。內容包括差分、勾股、方圓、球、弧矢弦、圓缺等等。柴村藤左衛門盛之 1657 年著《格致算書》三卷。書中將立體體積分解爲球、圓錐臺、截圓錐臺等，分别求積來計算。卷下爲初等數學內容，並提出求兩個聯立三元一次方程組的整數解的遺題。初坂宇右衛門尉重春於 1657 年著《圓方四卷記》四卷，對吉田光由的《塵劫記》和今村知商的《竪亥錄》做了解說。曾發誓不作發表的初坂，利用其師礒村吉德(? —1710)的方法解題之後，將解法作爲自己的研究結果載於《圓方四卷記》初卷，並對《塵劫記》十二遺題中的第十題的解答(礒村吉德做過解答)提出非難。於是，與其師礒村之間發生爭論。礒村則於 1659 年著《算法闕疑抄》五卷，首開和算對方陣研究之先河。書中除對《塵劫記》十二遺題做出解答外，又提出一百道遺題，其中包括最高爲十九階的方陣問題一批。1684 年他又著《增補算法闕疑抄》一書，對以前自己提出過的一百遺題做出解答。村松茂清於 1663 年刊行《算俎》五卷。書中講有關勾股弦定理應用及內容術等問題，在後二卷中講述了內接正 2^n 邊形之一邊的求法。他在邊長爲一的正方形中內接 2^{15} (32768) 邊形，求出一邊長爲 0.00009587……，從而得出圓周長的近似值 3.14159264877769886 9248。並對十九階方陣做出解答。山田正重 1659 年著《改算記》三卷，對《塵劫記》、《參兩錄》等著作內容做了批評，同時還指出其他著作的一些錯誤，並對《塵劫記》十二遺題中的九題做了解答，對將 $\sum_{i=1}^{81}2^{i-1}=2^{81}-1$ 改爲 $\sum_{i=1}^{81}2^{i-1}=2^{81}$ 表示反對。被譽爲算聖的大和算家關孝和(約 1640—1708)曾著《闕疑抄一百問答術》五卷(未刊，以手抄本流傳)，對礒村吉德的《算法闕疑抄》做了解答。此外，還指出《圓方四卷記》中的球體積公式之圓率 0.51 是錯誤的。又對《塵劫記》第十遺題提出新的近似計算法。在第五卷中又提出新的一百道遺題，內容包括：圓的分割、阿基米德螺綫、相交圓、方陣及其他許多內容，書中使用了中國傳人的天元術。沢口一之於 1671 年著《古今算法記》七卷。書中對《改算記》、《算法根源》(載有遺題一百五十)等著作中的遺題做了解答。並從圓面積的角度出發，强調指出前人的弧矢弦公式 $s^2=a^2+6h^2$ (S 爲弧長、a 爲弦、h 爲矢)的誤差錯誤。他在其著作的跋文中講道：夫算道之理總謂之則方圓之二也。然方理易得圓理難明矣[2]。書中還首次用算木來解方程式，並對方程式的多解等問題

① 日制長度單位　1 間≐1.818 米。
② 日制面積單位　1 坪≐3.3 米^2。

做了研究。在卷末又提出十五道遺題。後來，關孝和在其最初的著作《發微算法》中對這十五遺題做出解答。村瀨義益於1673年著《算法勿憚改》五卷，也是《算法闕疑抄》及其遺題的解答書。書中對平面和立體圖形做了詳細説明，並用内接法求出 $\pi=3.1416$。在其卷末，提出遺題一百道。關孝和於後來所著的《勿憚改一百問答術》就是對上述一百遺題做出的解答。

另外，還有許多和算書之間有着遺題承繼關係。由上可知，一般情況下，遺題是由其著者的弟子、門人及本流派的和算家來做解答，也有由其他流派和算家解答的。相對來講，下面要講到的算額奉揭流傳範圍稍大一些。上述的遺題承繼對數學問題的深入研究、和算家之間展開學術研究的相互競爭，以及對和算著作的保存和流傳等均起到積極的促進作用。而算額奉揭更加强了和算家間的相互學術競爭和流派間的學術對抗意識，並促使新的學術流派得以產生。同時，由於算額均挂在公共場所，所以對普及數學、增强民衆數學興趣愛好極爲有益。從這一角度來講，日本明治維新之後能夠迅速普及國民教育，使西方近代數學的引進、消化和吸收及再發展得以順利完成，其中算額奉揭的作用也是不可忽視的。

日本現存最古的算額是1683年奉揭的櫪木縣佐野市星宫神社的算額。奉揭者爲村山吉重，算額文字很難讀懂。根據1670年刊行的《算法直解》一書中所載京都目黑不動堂的算額（奉揭者不詳）可知，1670年以前算額就出現了。1691年和算家津田奉揭於京都祇園八阪神社的算額，以内容術（内接圓形法）得到一個一千零二十四次的方程式。其後，和算家中田將其進行化簡後，得到四十六次方程式。而和算家安島直圓（1739—1798）於1774年以十次方程解決了該問題並寫了四百字的計算術文，製成算額掛在祇園天王社。會田安明（1747—1817）與關（孝和）流的藤田貞資（1734—1807）之間發生以算額進行的學術爭論，成爲和算史上著名的大論戰。起因爲，關流的藤田貞資首先指出會田安明奉揭於芝愛宕山的算額術文中有誤，後者不同意他的指責，從而引起二人間的論戰。之後，會田安明針對藤田貞資在當時頗有影響的得意之作《精要算法》（三卷1781年初版），撰寫《改精要算法》一書，指出《精要算法》中存在錯誤。其後藤田貞資的弟子著《改精算法正論》及《非改精算法》進行辯護，同時指出《改精要算法》中有誤。對此，會田安明又著《改正算法改正論》與之爭辯。而藤田貞資派又著《非解惑算法》和《解惑弁誤》，對會田安明的《解惑算法》進行批評。如此，你來我往在長達近二十年的大論戰中，雙方共產生十二種和算書。同時，會田安明在大論戰過程中，脱離關流（原爲關流），並針對關流自成一派稱爲最上流，以示與關流抗爭的決心。但盡管雙方成爲論敵，會田安明仍很尊敬藤田貞資，稱他爲"當今關流中絶無僅有的天才"[3]，並積極籌劃、參加關孝和逝世一百周週年紀念會。另外，還有著名的二田（武田和福田）的算額論戰（1835年始），後來兩人奉揭的算額掛滿了神社的迴廊。當時，還產生過許多類似的算額論戰，這些學術爭論有力地推動和算研究向前發展。另外，算額奉揭除類似上述和算家、流派間的學術爭論的形式，還有不少是爲記念、祝賀而作的。如，關孝和逝世百年記念時，會田安明編著《捧法行院算額》（1807年）以示敬仰之情。其他許多和算家也奉獻算額以示紀念。會田安明等著名和算家的紀念日，也均有弟子、門人及其他和算家以算額奉獻作爲紀念其爲和算的發展做出的貢獻。爲使和算研究取得更廣泛的進展，有許多和算家著書立説將算額難題及解法等公開刊行，以使盡可能多的人有機會接觸數學。九州久留米藩主有馬賴僮（1714—1783）爲使和算研究得到更廣泛的支持，在其恩師關流的大和算家山路主住的指導和幫助下，著《拾璣算法》五卷，公開刊行。書中盡可能地收集當時和算最高水平的内容，並做了詳細解説。進入十九世紀，算額奉揭達到盛期，和算著作刊行數量、範圍也

更加增多和廣泛，和算也進入新的繁榮期。

當時，日本全國各神社、佛閣藏有許多算額。其中，保存至今的也不少。據1964年和1982年二次大規模普查，全國現存（均作爲國家重點文物保存）算額七百七十五個，地點遍及日本全國（北海道除外）。其中，十七世紀的算額三個；十八世紀的二十七個；其余爲十九世紀的作品。另外，還有十五種算額集問世。由此可知，當時算額本揭這一數學活動是相當活躍的。

綜上所述，在遺題承繼和算額本揭的發展過程中，和算各流派、和算家之間展開學術爭論，和算家們將自己研究的解題方法秘傳給後繼者，以與不同流派論戰、競爭。在解決問題方面，异派相爭，學術空氣活躍，促使問題得到盡快解決。另一方面，各流派之間在解決問題的方法方面於某種程度上相互不通信息，這又是對數學的發展不利的一面。但從總體上來講，對和算的迅速發展、繁榮做出了積極的貢獻，這一點是肯定的。此外，還對培養民衆數學興趣、修養、普及數學教育都起到促進作用，爲西方近代數學的傳入、消化和吸收建立了廣泛而堅實的基礎。

算額本揭的研究一直没有間斷，並越來越受重視，明治維新以後，此項傳統數學活動逐漸向發掘、保存和研究民族文化的方向發展。爲使此項傳統數學活動得到民衆的重視和支持，1972年東京大學入學考試題（數學）中，出了一道來源於和算的問題。另外，直到今日，有些日本人在新建或裝修茶館和飯館時，要請研究和算的專家、教授解答神社中的古算額。然後，復製古算額（往往放大數倍）並注明年月日，請解答者署名，將此算額掛在營業廳的正面，除吸引顧客外，還顯示店主在傳統文化方面的修養。在日本稱此類茶館、飯館爲"算額茶屋"。這種"算額茶屋"爲數不少，主要分布於著名神社、佛閣等游覽觀光地。由此，也可以看出日本國民對傳統文化的珍惜、愛護和修養。

參 考 文 獻

[1] 本田益夫：《金昆羅社算額與和算史概説》（日文），1983年，日本香川縣，第57頁。
[2] 一松信等：《新數學事典》（日文），1986年，日本大阪，第890頁。
[3] 同[2]，第898頁。

康托洛維奇與綫性規劃

紀曉福
（天津師範大學數學系）

綫性規劃是近50年來産生并得到迅速發展的應用數學的一個分支，它在軍事、工、農、商業、交通運輸、水文、地質、電力、理、化等領域都有重要而廣泛的應用，爲世界和人類節約了巨大財富。

康托洛維奇（Канторович，Л. В. 1912—1986）是綫性規劃的奠基人之一，他是原蘇傑出的數學家和經濟學家，他在泛函分析、程序設計、函數論、數學物理、微分方程、積分方程、變分法等領域均有貢獻，特别在綫性規劃方面1965年獲列寧獎，1975年與綫性規劃的另一奠基人美國數學家丹捷克共享諾貝爾經濟獎。本文只論述康托洛維奇（下簡稱康）在綫性規劃理論與應用研究中的成就。

綫性規劃是由康首次創立的，這見之于1939年列寧格勒大學出版的《生産組織與計劃的數學方法》（1959年再版）[1]。

在此書中康氏建立了最優生産計劃與綫性規劃的理論基礎，首次把最優生産計劃用數學模型表示出來，提出了有效的解法以及對這些問題進行經濟分析的方法，其核心是發現了判別因子法，建立了最優計劃與確定相應價格之間的客觀關系，以此爲基礎形成了最優特徵。

康創立綫性規劃理倫基礎是解決生産實際問題的結果，1938年春，列寧格勒膠合板廠研究室科研人員去找當時在列寧格勒大學工作的康請教。在研究如何分配車床生産任務的問題時，康發現，車床生産任務最優分配、最大降低消耗以及最充分利用原材料、燃料和運輸等問題在數學上都可以歸結爲同一類：即在綫性約束下求綫性函數的極值問題。

例如設有n臺車床生産由m種零件組成的産品，假設第i臺車床加工第k種零件，且一天能加工a_{ik}個（若在第i臺車床不能加工第k種零件，則認爲$a_{ik}=0$）。

現在要這樣來分配生産任務，以使成套産品的數量最大。用h_{ik}表示分配給每i臺車床用以加工第k種零件的時間（一個工作日看做1，h_{ik}是一個工作日的一部分），這是一個未知數；需要從得到最多産品這個條件來確定：

首先$h_{ik}\geqslant 0$，其次對于每一個固定的i有$\sum_{k=1}^{m}h_{ik}=1$。此外第k種零件的數量爲$z_k=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}h_{ik}$，因爲要得到成套産品，應有$z_1=z_2=\cdots=z_m$，用z表示$z_i$的公共值即成套産品的數量，它應該有最大值。于是，康得到下列數學問題：

求(h_{ik})，且使z成爲最大的Z_{max}：

$$\sum_{i=1}^{n}a_{i1}h_{i1}=\cdots=\sum_{i=1}^{n}a_{im}h_{im}=Z_{max}\quad s.t.\ \sum_{k=1}^{m}h_{ik}=1\ (i=1,2,\cdots,n)$$

$h_{ik} \geqslant o(i=1,2,\cdots,n, k=1,2,\cdots,m)$

這裡約束條件$\sum_{k=1}^{m} h_{ik}=1, h_{ik} \geqslant o$構成 nm 維空間中的凸多面體。從經典分析的結果知道，求綫性函數在區間上的極值只要枚舉區間的兩個端點并從中選取最大者。這個原則也適用于求綫性函數在凸多面體的最大值，然而這就要枚舉$\sum_{ij=0}(-1)^{i+j}C_{(m-i)(n-j)}^{m+n-1}C_m^iC_n^j$次，膠合板廠提出的問題是 $n=8, m=5$，那麼對于這個問題就要枚舉$C_{40}^{12} \approx 10^9$次。

顯然，枚舉法是行不通的，應該尋找新的解法。1939年1月康找到了判別因子法，現在上述問題中取 $m=2$，即加工兩種零件來解釋判別因子法的思想。判別因子法的基本思想在于對一切 i 考察比例關係$k_i=\frac{a_{i2}}{a_{i1}}$，這是每一臺車床加工兩種零件的效率之比，可以認爲$k_1 \leqslant k_2 \leqslant \cdots \leqslant k_n$，顯然，在這種情形下最有利的是開頭的車床都加工第一種零件，即對這些相應的 i 取 $h_{i1}=1, h_{i2}=0$，而後面的車床都加工第二種零件，即對這些相應的 i 取 $h_{i1}=0, h_{i2}=1$，現在需要確定號碼 S，使

$$\sum_{i=1}^{s-1} a_{i1} < \sum_{i=s}^{n} a_{i2}, \quad \sum_{i=1}^{s} a_{i1} \geqslant \sum_{i=s+1}^{n} a_{ik}$$

這就是說，若撥出 S−1 臺車床加工第一種零件就少些，而撥出 S 臺車床加工第一種零件就夠用了，或者就多了。那麼，當 $1 \leqslant i \leqslant s-1$ 時取 $h_{i1}=1, h_{i2}=0$，當 $s+1 \leqslant i \leqslant n$ 時取 $h_{i1}=0, h_{i2}=1$，而 h_{s1}與 h_{s2}由 $h_{s1}+h_{s2}=1$ 及$\sum_{i=1}^{S-1} a_{i1}+h_{s1}a_{s1}=\sum_{i=s+1}^{n} a_{i2}+h_{s2}a_{s2}$來確定，這樣就求得問題的解。

由此看到，問題的求解完全等價于求比例關系$K_s=\frac{a_{s2}}{a_{s1}}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$，這里的 λ_1、λ_2 就是所謂的判別因子，這也可推廣到任意 m 的情形。

判別因子法是簡單而有效的，但它不只是單純地給出問題的解，它有重要的性質，首先，判別因子 λ_k 是相應零件的價格，其次，判別因子法可用來解決一系列問題，例如不成套加工問題以及前面提到過的各種問題，還可以解決其它一些問題，如編制生産進度表等。

後來，康以判別因子法爲基礎對綫性規劃特別是綫性規劃的專門問題進行了卓有成效的研究。

衆所周知，1947年美國數學家丹捷克對一般綫性規劃問題提出了"單純形解法"。而鮮爲人知的是，康在發現判別因子法之前也曾對"單純形法"進行過研究。

判別因子法是康1939年1月提出的，同年5月他在該市大學和建工學院報告了自己的工作。離該膠合板廠向他咨詢僅1年。據他回憶[2]，當時他對這個問題很感興趣，但覺得特殊和初等，因而沒有立即研究。在討論班上也曾討論過，但其他人未提出解法。後來他找到了特殊解。1938年秋他在該市赫爾岑師院十月科學會議上報告了自己的工作，1986年他逝世後，在整理遺物時發現了一篇手稿《關于工業、農業和運輸經濟的某些數學問題》，基本上就是《生産組織與計劃的數學方法》一書中的問題，然而未用判別因子法。另外他的有關論文都是以判別因子法的對偶定理爲基礎的。因此這篇遺稿極可能是他1938年秋所做的報告，所用解法就是丹捷克1947年提出的單純形法。

康氏的這篇遺作共11頁(第4頁、11頁已遺失)。他的兒子將遺作整理發表在紀念他創立綫性規劃50周年的文集《經濟數學模型與方法》[3]裡。文中提出了5個數學問題，然後給出解

法，最後是應用，舉出在工業、農業、運輸方面的 4 個重要例子。

最基本的數學問題如下：

求滿足以下條件的數 $h_{ik}\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,n,k=1,2,\cdots,m)$：

$$\sum_{k=1}^{m}h_{ik}=1,(i=1,2,\cdots,n) \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m}h_{i1}a_{i1}=\cdots=\sum_{i=1}^{n}h_{im}a_{im}=Z \tag{2}$$

其中 a_{ik}是給定的非負數，且使 Z 最大。

接着他指出此問題的解是存在的，且解都是由(1)所構成的凸集的頂點。他指出，滿足條件(1)的非負數組 h_{ik}構成 nm 維空間中 $n(m-1)$維多面體，方程組(2)是一組平行的 $m(n-1)$維平面。應選取最大的 Z，使所指出的平面仍然與多面體切觸。顯然這個問題的解是存在的，但不一定唯一。

康指出，顯然至少有一個解在所指出的多面體的 $nm-(m(n-1))=m-1$ 維界面上，但在 $m-1$ 維界面上點的坐標 h_{ik}至少有$(m-1)(n-1)$個 0，于是解中有$(m-1)(n-1)$個 0。

盡管從解的存在性來看，這些問題都很簡單，但要給出一個簡便法是很困難的，他指出了枚舉法是不現實的。

接着康對上述問題的數值解法進行了如下描述：

當 n、m$(n\geqslant m)$爲任意數時，從滿足(1)、(2)但 Z 不爲最大的某組 h_{ik}出發，首先，在不降低 Z 時可以做到使在 h_{ik}中有$(m-1)(n-1)$個爲 0，然後分出使 $0<h_{ik}<1$ 的 i、k(一般有 $2m-1$ 個)，列方程組

$$\sum_{k}{}' \Delta h_{ik}=0,\sum_{i}{}' a_{ik}\Delta h_{ik}+\delta_{ks}=q(k=1,\cdots,m),$$

其中和號$\sum$上的“′”表示對分出的 i、k 求和，$\delta_{ks}=\begin{cases}1, 若\ k=s\\0, 若\ k\neq s\end{cases}$是克羅内耳函數，這個關于 h_{ik}和 q 的方程組對于每一個 $s=1,2,\cdots,n$ 都有解 $q_s>0$，那麼，如果對于某些下標 i,s_1,s_2 有 $h_{is_1}>0$，且 $a_{is_2}q_{s2}q_{s1}>0$，則 Z 的值就可能增大，如此繼續做下去，如果對于任何下標上述不等式都不成立，則 Z 就達到最大值。

這裡所描述的方法基本思想就是：不去枚舉約束條件構成的凸多面體所有頂點，而是從某一個頂點開始，按照某種次序考察一部分頂點，逐步改善目標函數值，當不能再改善時即求到了最優解，這就是單純形法的基本思想。盡管上述解法是提綱式的，但它是康在分析分配車床加工任務問題時首次產生的思想，要比丹捷克早 10 年。使人感興趣的是，爲什么未將它正式發表？這一方面體現了他嚴謹的治學態度，另一方面，他當時考慮的不只是單純的數學解法，他要想得到更多的東西，這可從 1960 年 12 月 31 日他給 Management Science 主编的信[4]看出：他說，“每當我搞這些問題時，我總要選擇，是注意問題的數學方面(根據我本人的經驗，這些數學問題與其他數學問題相比簡單多了，以至任何一個數學家都能做出來且能把所叙述的思想搞得很嚴格)，還是注意問題的經濟實用方面，而這後一方面正是新的非平凡的東西，且引起了懷疑和反對，自然地，我選擇了後者”。于是康在 1939 年 1 月找到了有經濟解釋的判别因子法，其特點是把解原問題與對偶問題的過程緊密結合在一起，因而顯得簡單明瞭。

康氏在綫性規劃的理論與應用兩方面繼續進行了更深入的研究。

1940年,他把《生產組織與計劃的數學方法》一書中的結果以抽象的數學形式發表出來,見《解某類極值問題的一種有效方法》[5],在其中研究了無窮維的凸規劃問題,建立了最優特征并叙述了以逐步改善逼近爲基礎的數值方法的思想。

1940年他與別人合作解決了運輸問題,在判別因子法的基礎上提出了解運輸問題的位勢法,此方法及其推廣目前仍廣泛用于經濟實際中。

1942年康解決了抽象的運輸問題《關于重物移動問題》[6],末尾附了兩個實例,一是鐵路運輸問題,一是平整飛機場問題。

1942年完成大型手搞《最合理利用資源的經濟計算》,該書的核心是叙述了生産計劃及其動態模型,他以判別因子作爲最優價格建立了對廣泛的基本經濟問題進行經濟數學分析的基礎。

1951年與他人合著《合理下料的計算》[7](1971年再版),提出了解下料問題的獨特方法。類似的思想後來由美國數學家貝爾曼在動態規劃理論中所發展。

然而,盡管康在綫性規劃理論與應用的研究中自樹一派,取得了巨大成就,但長期得不到原蘇聯經濟學界及政府有關部門的承認。還在1939年康在工學院與學者之家作報告時就遇到了來自"左"的反對意見,攻擊者認爲主要問題是"應用了數學方法",因爲西方利用數學方法的"經濟數學學派是反動的,經濟數學是爲資本主義辯護的工具"。這就迫使康在寫《生產組織與計劃的數學方法》一書時盡量不使用"經濟"這個詞,而只談"生産的組織與計劃"。他專門用一節的篇幅來反駁反對的意見。

前面已提到1940年康與人合作解決了運輸問題,盡管得到了科學院院士柯爾莫哥洛夫等人的支持,但該文當時任何雜志都不肯刊登,其原因同樣是由于該文中利用了數學方法。直到1949年才得以發表[8]。

對康打擊最大的是《最合理利用資源的經濟計算》一書的遭遇。該書得到了當時身爲俄羅斯聯邦最高蘇維埃代表的索伯列夫院士的支持,因此被送到國家計委,指望予以采納,但兩位計委右邊副主任過目後并不欣賞。在這同時,康在莫斯科經濟研究所的一個討論班上也作了報告,若干著名經濟學家參加了討論,但并未獲得理解。1943年支持者建議由列寧格勒大學推薦此書參加斯大林獎的評選,該大學校長先在莫斯科打聽情況後,就斷然否決了這種可能性。由此康感到繼續進行這方面的研究是危險的,必須把這個工作往後推一段時間。

在1949年因泛函分析的成就得到斯大林獎後,康才重新開始研究數學在經濟中的應用。

但是50年代中期康的一系列研究成果再次遭到了當時蘇聯國家計委等部門的否定。

然而科學的真理最終戰勝了"左"的偏見,從創立綫性規劃到得到正式承認差不多整20個年頭。1959年《最合理利用資源的經濟計算》得以出版[9],同年《生產組織與計劃的數學方法》重新發表,1958年康托洛維奇被選爲蘇聯科學院通訊院士,1964年選爲院士,他也先後被選爲許多國家的科學院成員并被許多國外大學授予名譽博士,康托洛維奇對數學和經濟科學的貢獻是巨大的。

參 考 文 獻

以下8種文獻作者均爲康托洛維奇(Канторович Л. В.):

[1]Математические методы организация и планирования иройзводства, применение математики в экономических исследованиях. 2-е изд. М. ,1959. С. 251 －309

[2]Мой путь в науке; предполагавшийся докл. в Моск. мат. о-ве. Успехи мат. наук,1987,Т. 42, вып 2,с. 183-213

[3]Экономико математические модели и методы, Воронеж; Изд-во Воронежского университета, 1989.

[4]同上。

[5]Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем Докл. АН СССР,1940,Т. 28. No 3. с. 212－215

[6]О перемещении масс Докл. АН СССР,1942,Т. 37. No 7-8. с. 227-229

[7]Расчет рационального раскроя промышленных материалов. Газ. -журн. кн. пзд-во, 1951, 198С. ,Соавт. : Залгаллер В. А.

[8]Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков Проблемы повышения эффективности работы транспорта. М. ;Л. ,1949, с. 110－138;ил. Соавт. ;Гаврин М. К.

[9]Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. -М. ;изд-во АН СССР,1959. － 344 .

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海內外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行编輯工作，沒有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。编輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、编輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析:數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4):339～357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特:内蒙古大學出版社，臺北:九章出版社，8～16

Robins G.,Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art, Historia Mathematica, 1985, 12(3):107～122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京:科學出版社，1965，105

Boyer C, B. A history of mathomatics, New York, London, Sydney:John Wiley and sons, INC, 1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會積，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝編，北京:中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後编排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄内，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年内答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

内蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》编輯部
1992.5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海内外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行編輯工作，沒有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。編輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、編輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析：數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4)：339～357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特：内蒙古大學出版社，臺北：九章出版社，8～16

Robins G., Shute C. D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art, Historia Mathematica, 1985, 12(3): 107～122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京：科學出版社，1965，105

Boyer C, B. A history of mathematics, New York, London, Sydney: John Wiley and sons, INC, 1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會稽，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝編，北京：中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後編排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄内，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年内答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

内蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》編輯部
1992. 5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海內外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行編輯工作，沒有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。編輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、編輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析：數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4)：339～357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特：內蒙古大學出版社，臺北：九章出版社，8～16

Robins G., Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art, Historia Mathematica, 1985, 12(3)：107～122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京：科學出版社，1965，105

Boyer C, B. A history of mathomatics, New York, London, Sydney：John Wiley and sons, INC, 1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會積，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝編，北京：中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後編排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄內，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年內答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

內蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》編輯部
1992.5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海內外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行编輯工作，沒有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。编輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、编輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元.論一致分布與近似分析:數論方法(I)，中國科學，1973(4):339~357

沈康身.西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特:内蒙古大學出版社，臺北:九章出版社，8~16

Robins G.,Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art, Historia Mathematica, 1985, 12(3):107~122

2. 專著類：

錢寶琮.中國數學史.北京:科學出版社，1965，105

Boyer C, B. A history of mathomatics, New York, London, Sydney:John Wiley and sons, INC, 1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會積，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝編，北京:中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後编排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄内，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年内答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

内蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》编輯部
1992.5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海内外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行编輯工作，没有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。編輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、编輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析：數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4)：339～357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特：内蒙古大學出版社，臺北：九章出版社，8～16

Robins G.，Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art，Historia Mathematica，1985，12(3)：107～122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京：科學出版社，1965，105

Boyer C，B. A history of mathematics，New York，London，Sydney：John Wiley and sons，INC，1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會積，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝编，北京：中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後编排順序，用阿拉伯數碼標記，如“……對這個問題有不同看法[3]。……”在“參考文獻”欄内，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年内答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

内蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》编輯部
1992. 5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海内外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行編輯工作，沒有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。編輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、編輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析：數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4)：339～357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特：内蒙古大學出版社，臺北：九章出版社，8～16

Robins G.，Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art，Historia Mathematica，1985，12(3)：107～122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京：科學出版社，1965，105

Boyer C，B. A history of mathematics，New York，London，Sydney：John Wiley and sons，INC，1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會積，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝編，北京：中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後編排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄内，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年内答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

内蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》編輯部
1992.5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海內外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行編輯工作，沒有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。編輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、編輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析:數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4):339～357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特:內蒙古大學出版社，臺北:九章出版社，8～16

Robins G., Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art, Historia Mathematica, 1985, 12(3):107～122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京:科學出版社，1965，105

Boyer C, B. A history of mathematics, New York, London, Sydney:John Wiley and sons, INC, 1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會積，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝編，北京:中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後編排順序，用阿拉伯數碼標記，如“……對這個問題有不同看法[3]。……”在“參考文獻”欄內，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年內答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

內蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》編輯部
1992.5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海内外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行編輯工作，没有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。編輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、編輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元.論一致分布與近似分析：數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4)：339～357

沈康身.西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特：内蒙古大學出版社，臺北：九章出版社，8～16

Robins G.，Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art，Historia Mathematica，1985，12(3)：107～122

2. 專著類：

錢寶琮.中國數學史.北京：科學出版社，1965，105

Boyer C，B. A history of mathomatics，New York，London，Sydney：John Wiley and sons，INC，1968.287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶.數書九章第一章第二卷古歷會積，宜稼堂叢書本

[唐]段成式.酉陽雜俎前集卷三貝編，北京：中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後編排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄内，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年内答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

内蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》编輯部
1992.5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海內外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行編輯工作，没有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。編輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、編輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析:數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4):339～357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特:內蒙古大學出版社，臺北:九章出版社，8～16

Robins G.，Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art，Historia Mathematica，1985，12(3):107～122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京:科學出版社，1965，105

Boyer C，B. A history of mathematics，New York，London，Sydney:John Wiley and sons，INC，1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會積，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝編，北京:中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後編排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄內，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年內答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

內蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》編輯部
1992.5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海内外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行编輯工作，没有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。编輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、编輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析：數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4)：339~357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特：内蒙古大學出版社，臺北：九章出版社，8~16

Robins G.，Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art，Historia Mathematica，1985，12(3)：107~122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京：科學出版社，1965，105

Boyer C，B. A history of mathomatics，New York，London，Sydney：John Wiley and sons，INC，1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會積，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝编，北京：中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後编排順序，用阿拉伯數碼標記，如“……對這個問題有不同看法[3]。……”在“參考文獻”欄内，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年内答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

内蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》编輯部
1992.5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7 月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海内外數學史同仁。從1990年以來，已出版 2 輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行編輯工作，没有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。編輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、編輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析:數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4):339~357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特:内蒙古大學出版社，臺北:九章出版社，8~16

Robins G., Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art, Historia Mathematica, 1985, 12(3):107~122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京:科學出版社，1965，105

Boyer C, B. A history of mathomatics, New York, London, Sydney:John Wiley and sons, INC, 1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會積，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝編，北京:中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後編排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄内，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年内答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

内蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》编輯部
1992. 5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海内外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行編輯工作，没有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。編輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、編輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析:數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4):339～357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特:内蒙古大學出版社，臺北:九章出版社，8～16

Robins G., Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art, Historia Mathematica, 1985, 12(3):107～122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京:科學出版社，1965，105

Boyer C, B. A history of mathematics, New York, London, Sydney:John Wiley and sons, INC, 1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會稽，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝編，北京:中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後編排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄内，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年内答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

內蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》編輯部
1992.5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海內外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行編輯工作，沒有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。編輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、編輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析：數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4)：339～357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特：內蒙古大學出版社，臺北：九章出版社，8～16

Robins G.，Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art，Historia Mathematica，1985，12(3)：107～122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京：科學出版社，1965，105

Boyer C，B. A history of mathomatics，New York，London，Sydney：John Wiley and sons，INC，1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會稽，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝編，北京：中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後編排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄內，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年內答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

內蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》編輯部
1992.5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海内外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行編輯工作，沒有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。編輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、编輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析：數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4)：339～357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特：内蒙古大學出版社，臺北：九章出版社，8～16

Robins G.，Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art，Historia Mathematica，1985，12(3)：107～122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京：科學出版社，1965，105

Boyer C，B. A history of mathomatics，New York，London，Sydney：John Wiley and sons，INC，1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會積，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝編，北京：中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後編排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄内，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年内答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

内蒙師大科學史研究所

《數學史研究文集》编輯部

1992.5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海内外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行編輯工作，没有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。編輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、編輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析：數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4)：339～357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特：内蒙古大學出版社，臺北：九章出版社，8～16

Robins G.，Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art，Historia Mathematica，1985，12(3)：107～122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京：科學出版社，1965，105

Boyer C，B. A history of mathomatics，New York，London，Sydney：John Wiley and sons，INC，1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會積，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝編，北京：中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後編排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄内，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年内答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

内蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》編輯部
1992. 5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源．主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海內外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行編輯工作，沒有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。編輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、編輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析:數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4):339~357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特:内蒙古大學出版社，臺北:九章出版社，8~16

Robins G.，Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art，Historia Mathematica，1985，12(3):107~122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京:科學出版社，1965，105

Boyer C，B. A history of mathomatics，New York，London，Sydney:John Wiley and sons，INC，1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會積，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝編，北京:中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後編排順序，用阿拉伯數碼標記，如“……對這個問題有不同看法[3]。……”在“參考文獻”欄内，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年内答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

内蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》編輯部
1992. 5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收藏數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海内外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行編輯工作，没有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。編輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、編輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析：數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4)：339～357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特：内蒙古大學出版社，臺北：九章出版社，8～16

Robins G.，Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art，Historia Mathematica，1985，12(3)：107～122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京：科學出版社，1965，105

Boyer C，B. A history of mathematics，New York，London，Sydney：John Wiley and sons，INC，1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會稽，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝編，北京：中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後編排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄内，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年内答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

內蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》編輯部
1992.5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海内外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行編輯工作，没有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。編輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、編輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析：數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4)：339～357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特：内蒙古大學出版社，臺北：九章出版社，8～16

Robins G.，Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art，Historia Mathematica，1985，12(3)：107～122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京：科學出版社，1965，105

Boyer C，B. A history of mathematics，New York，London，Sydney：John Wiley and sons，INC，1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會積，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝編，北京：中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後編排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄内，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年内答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

内蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》編輯部
1992.5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海內外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行編輯工作，沒有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。編輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、編輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析:數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4):339～357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特:內蒙古大學出版社，臺北:九章出版社，8～16

Robins G. , Shute C. D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art, Historia Mathematica, 1985, 12(3):107～122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京:科學出版社，1965，105

Boyer C, B. A history of mathomatics, New York, London, Sydney:John Wiley and sons, INC, 1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會積，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝編，北京:中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後編排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄內，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年內答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

內蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》編輯部
1992.5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海內外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行編輯工作，沒有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。編輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、編輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析：數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4)：339～357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特：內蒙古大學出版社，臺北：九章出版社，8～16

Robins G., Shute C. D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art, Historia Mathematica, 1985, 12(3)：107～122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京：科學出版社，1965，105

Boyer C, B. A history of mathematics, New York, London, Sydney：John Wiley and sons, INC, 1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會稽，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝編，北京：中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後編排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄內，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年內答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

內蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》編輯部
1992. 5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海内外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行編輯工作，沒有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。編輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、編輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析:數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4):339～357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特:内蒙古大學出版社，臺北:九章出版社，8～16

Robins G., Shute C. D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art, Historia Mathematica, 1985, 12(3):107～122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京:科學出版社，1965，105

Boyer C, B. A history of mathomatics, New York, London, Sydney:John Wiley and sons, INC, 1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會積，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝編，北京:中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後編排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄内，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年内答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

内蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》編輯部
1992. 5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源．主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海内外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行编輯工作，没有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上膳清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。编輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、编輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元．論一致分布與近似分析：數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4)：339～357

沈康身．西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特：内蒙古大學出版社，臺北：九章出版社，8～16

Robins G.，Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art，Historia Mathematica，1985，12(3)：107～122

2. 專著類：

錢寶琮．中國數學史．北京：科學出版社，1965，105

Boyer C，B. A history of mathomatics，New York，London，Sydney：John Wiley and sons，INC，1968．287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶．數書九章第一章第二卷古歷會積，宜稼堂叢書本

[唐]段成式．酉陽雜俎前集卷三貝编，北京：中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後编排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄内，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年内答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

内蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》编輯部
1992.5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源．主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海內外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行編輯工作，没有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。編輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、編輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元.論一致分布與近似分析:數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4):339～357

沈康身.西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特:内蒙古大學出版社，臺北:九章出版社，8～16

Robins G.，Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art，Historia Mathematica，1985，12(3):107～122

2. 專著類：

錢寶琮.中國數學史.北京:科學出版社，1965，105

Boyer C，B. A history of mathomatics，New York，London，Sydney:John Wiley and sons，INC，1968.287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶.數書九章第一章第二卷古歷會稽，宜稼堂叢書本

[唐]段成式.酉陽雜俎前集卷三貝編，北京:中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後編排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄内，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年内答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

內蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》編輯部
1992.5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海内外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行编輯工作，没有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上膳清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。编輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、编輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析:數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4):339～357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特:内蒙古大學出版社，臺北:九章出版社，8～16

Robins G.，Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art，Historia Mathematica，1985，12(3):107～122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京:科學出版社，1965，105

Boyer C，B. A history of mathomatics，New York，London，Sydney:John Wiley and sons，INC，1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會積，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝编，北京:中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後编排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄内，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年内答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

内蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》编輯部
1992. 5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海内外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行编輯工作，没有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上膳清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。編輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、编輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析:數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4):339~357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特:内蒙古大學出版社，臺北:九章出版社，8~16

Robins G., Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art, Historia Mathematica, 1985, 12(3):107~122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京:科學出版社，1965，105

Boyer C, B. A history of mathematics, New York, London, Sydney:John Wiley and sons, INC, 1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會積，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝編，北京:中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後编排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄内，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年内答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

内蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》编輯部
1992. 5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海內外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行編輯工作，沒有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。編輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、編輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析:數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4):339～357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特:內蒙古大學出版社，臺北:九章出版社，8～16

Robins G.，Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art，Historia Mathematica，1985，12(3):107～122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京:科學出版社，1965，105

Boyer C，B. A history of mathomatics，New York，London，Sydney:John Wiley and sons，INC，1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會稽，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝編，北京:中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後編排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄內，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年內答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

內蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》編輯部
1992. 5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海內外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行編輯工作，沒有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。編輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、編輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析：數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4)：339～357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特：內蒙古大學出版社，臺北：九章出版社，8～16

Robins G., Shute C. D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art, Historia Mathematica, 1985, 12(3):107～122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京：科學出版社，1965，105

Boyer C, B. A history of mathematics, New York, London, Sydney: John Wiley and sons, INC, 1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會積，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝編，北京：中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後編排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄內，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年內答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

內蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》編輯部
1992. 5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海內外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行編輯工作，没有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。編輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、編輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析:數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4):339~357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特:內蒙古大學出版社，臺北:九章出版社，8~16

Robins G., Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art, Historia Mathematica, 1985, 12(3):107~122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京:科學出版社，1965，105

Boyer C, B. A history of mathematics, New York, London, Sydney:John Wiley and sons, INC, 1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會稽，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 西陽雜俎前集卷三貝編，北京:中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後編排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄內，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年內答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

內蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》編輯部
1992.5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海內外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行編輯工作，沒有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。編輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、編輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析:數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4):339～357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特:內蒙古大學出版社，臺北:九章出版社，8～16

Robins G.,Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art, Historia Mathematica, 1985, 12(3):107～122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京:科學出版社，1965，105

Boyer C, B. A history of mathematics, New York, London, Sydney:John Wiley and sons, INC, 1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會積，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝編，北京:中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後編排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄內，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年內答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

內蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》編輯部
1992.5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海内外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行编輯工作，沒有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。编輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、编輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元.論一致分布與近似分析:數論方法(I)，中國科學，1973(4):339~357

沈康身.西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特:内蒙古大學出版社，臺北:九章出版社，8~16

Robins G.，Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art，Historia Mathematica，1985，12(3):107~122

2. 專著類：

錢寶琮.中國數學史.北京:科學出版社，1965，105

Boyer C，B. A history of mathomatics，New York，London，Sydney:John Wiley and sons，INC，1968.287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶.數書九章第一章第二卷古歷會積，宜稼堂叢書本

[唐]段成式.酉陽雜俎前集卷三貝編，北京:中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後编排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄内，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年内答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

内蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》编輯部
1992.5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海內外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行編輯工作，沒有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。編輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、編輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析:數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4):339～357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特:內蒙古大學出版社，臺北:九章出版社，8～16

Robins G.，Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art，Historia Mathematica，1985，12(3):107～122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京:科學出版社，1965，105

Boyer C，B. A history of mathomatics，New York，London，Sydney:John Wiley and sons，INC，1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會積，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝編，北京:中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後編排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄內，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年內答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

内蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》编輯部
1992.5.

投稿須知

本文集是一種不定期連續出版物，基本上每年一輯，7月出版，每輯二十五六萬字。主要收載數學史研究論文，少量的綜述性文章和譯文，以及外國數學史介紹等。論文和文章的來源，主要是本所研究人員和研究生的成果，但也有一定的版面提供給海內外數學史同仁。從1990年以來，已出版2輯，得到了許多學者的關心和支持，有的提出了寶貴的意見或建議，有的寄來了稿件，對于提高本文集的質量起了很好的作用，我們表示衷心感謝。

我們是在業餘進行編輯工作，沒有專職人員，由于稿件的格式、參考文獻寫法不統一，使稿件處理十分費力，也給排版、印刷帶來不少困難。爲了提高質量特提出下列投稿須知，從第四輯起請投稿者遵守：

一、提交的稿件必須是在方格稿紙上謄清，并用標準簡化漢字，標點符號的使用要正確。

二、文中的引文必須與原著核實，對那些一般不常見的漢字要工整書寫。

三、文中的外文人名、書名等，要書寫正確，更不得草書。

四、文中的插圖要工整繪製，照片要黑白反差明顯。编輯者可以代爲繪製，要收繪製費。

五、文中的數學公式和所用符號一定要清楚、正確。

六、编輯者對來稿有修改權，或者退回作者修改，不願修改的請在稿端注明。

七、參考文獻要按照國家標準規定方式書寫，舉例如下：

1. 雜志類(包括不定期連續出版物)：

華羅庚，王元. 論一致分布與近似分析:數論方法(Ⅰ)，中國科學，1973(4):339～357

沈康身. 西方數學文獻舉隅廣義，數學史研究文集第一輯，1990，呼和浩特:内蒙古大學出版社，臺北:九章出版社，8～16

Robins G.，Shute C.D. Mathematics bases of ancient Egyptian architecture and graphic art，Historia Mathematica，1985，12(3):107～122

2. 專著類：

錢寶琮. 中國數學史. 北京:科學出版社，1965，105

Boyer C，B. A history of mathomatics，New York，London，Sydney:John Wiley and sons，INC，1968. 287

3. 古籍類(包括現在重印的)：

[宋]秦九韶. 數書九章第一章第二卷古歷會積，宜稼堂叢書本

[唐]段成式. 酉陽雜俎前集卷三貝編，北京:中華書局，1981

其他文獻可以類推，不再舉例。

參考文獻按出現先後編排順序，用阿拉伯數碼標記，如"……對這個問題有不同看法[3]。……"在"參考文獻"欄内，將序號(去掉方括號，再空一格)頂左格書寫，依次列出。

八、由于本文集一年出一本，故來稿是否采用，在半年内答復。請自留底稿。不采用的稿件恕不退還。

九、凡發表的稿件，將酌付稿酬。

内蒙師大科學史研究所
《數學史研究文集》编輯部
1992.5.